



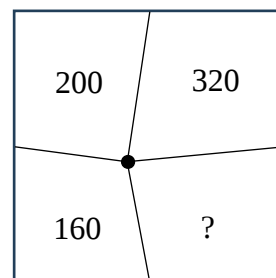
Kangourou della Matematica 2026
finale nazionale italiana
Cesenatico, 19 settembre 2026



LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (5 punti) Osserva la figura: in un quadrato sono stati tracciati 4 segmenti che hanno tutti un estremo in uno stesso punto interno al quadrato e l'altro nel punto medio di uno dei lati del quadrato. Sono indicate le aree (in centimetri quadrati) di tre dei quattro quadrilateri così individuati. Di quanti centimetri quadrati è l'area del quarto?



Risposta: 280.

Svolgimento. La somma delle aree di due quadrilateri opposti è la stessa per le due coppie. Infatti, siano A, B, C, D i punti medi dei lati del quadrato originale e P il punto interno: è chiaramente sufficiente dimostrare che la somma delle aree dei triangoli APD e BCP coincide con la somma delle aree dei triangoli ABP e CDP . Tutti questi triangoli hanno base di uguale lunghezza e la somma delle altezze di due triangoli opposti coincide con la misura del lato del quadrato $ABCD$.

J2. (7 punti) C'è un mucchio di monete apparentemente tutte uguali: sono tutte dello stesso peso tranne una che è l'unica falsa e pesa leggermente di meno, ma non tanto di meno da potermene rendere conto prendendo le monete in mano. Posso individuare la moneta falsa usando una bilancia a due piatti, che permette di confrontare il peso di due gruppi di monete qualunque. Se con al più 6 confronti sono certo di poter individuare la moneta falsa, quante possono essere al massimo le monete nel mucchio?

Risposta: 729.

Svolgimento. Supponiamo che il numero delle monete sia divisibile per 3; poniamo un terzo delle monete su un piatto, un terzo sull'altro piatto e l'ultimo terzo in disparte. A confronto dei due piatti fatto, possiamo concentrarci su un terzo delle monete. Se anche questo terzo è ripartibile in tre gruppi equipotenti possiamo ripetere l'operazione. Per massimizzare la quantità di monete esaminabili, dobbiamo allora supporre che il loro numero iniziale sia una potenza di 3: poiché ci sono concesse 6 misurazioni, questo numero deve essere $3^6 = 729$.

J3. (11 punti) Quante sono le coppie non ordinate di numeri interi (positivi) palindromi di 4 cifre tali che la somma dei due numeri che la compongono sia un numero palindromo di 5 cifre? (Un numero viene detto palindromo se è indifferente leggere le sue cifre da sinistra a destra o da destra a sinistra. Una delle coppie cercate è, ad esempio, {2002, 9009} che fornisce 11011.)

Risposta: 36.

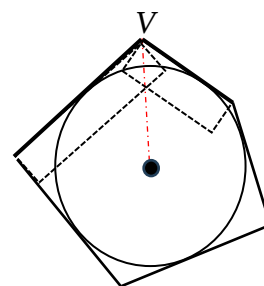
Svolgimento. Poiché il più grande palindromo di 4 cifre è 9999, le somme relative alle nostre coppie non possono superare 19998, quindi la cifra alle loro estremità deve essere 1 per tutte. Ne segue che la somma delle prime cifre (migliaia) e quella delle ultime (unità) nei due numeri deve essere 11 per ogni coppia. Si può ottenere 11 in 4 modi diversi: $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$, $5 + 6$. La palindromia impone che in ogni numero la seconda (centinaia) e la terza (decine) cifra coincidano. Se sono 0 si hanno 4 coppie e la somma è 11011 per ogni coppia. Banalmente si verifica che non possono essere 1. Possono essere invece ciascuna delle rimanenti, ma una facile verifica impone che nell'altro numero ne siano il complemento a 11: in questo caso la somma è 12221 per ogni coppia e le coppie sono $4 \times 8 = 32$.

In alternativa. Poiché il più grande palindromo di 4 cifre è 9999, le somme relative alle nostre coppie non possono superare 19998, quindi la cifra alle loro estremità deve essere 1 per tutte. La somma di due numeri palindromi di quattro cifre è della forma $S = 11011 + 110s$ ove s è la somma delle cifre delle decine (e quindi delle centinaia) e può variare tra 0 e 18. Se $s = 11$ risulta $S = 12221$ e quindi si ha un palindromo; negli altri casi in cui $s \geq 10$ il numero di decine aggiunte non è palindromo e questo non permette di avere somma palindroma: ad es. $11011 + 1100 = 12111$; per s compreso tra 1 e 9, similmente, la somma non intacca la cifra delle migliaia ma quella delle decine sì e quindi non si può avere un palindromo ad es. $11011 + 110 = 11121$. Quindi è possibile avere un palindromo solo per $s = 0$ (un caso) e per $s = 11$ (8 casi). Quindi in totale 4×9 coppie possibili.

J4. (14 punti) Un pentagono convesso con gli angoli interni tutti maggiori di 90 gradi è circoscritto ad una circonferenza di raggio 10 cm e ha perimetro 75 cm. Una moneta circolare di raggio 1 cm viene tralata in modo che il suo centro rimanga sempre sul bordo del pentagono e lo percorra interamente. Di quanti centimetri quadrati è l'area della regione contenuta nel pentagono e coperta dalla moneta durante il suo moto? (I dati numerici del problema sono compatibili con il vincolo sugli angoli; non è richiesta la dimostrazione di questo fatto.)

Risposta: 71,25.

Svolgimento. Chiamiamo P il pentagono. Per ogni lato di P , la moneta copre internamente a P un rettangolo che ha un lato coincidente con il lato di P in questione e i lati a esso ortogonali di lunghezza 1 cm. La somma delle aree di questi rettangoli è 75 cm^2 , ma i rettangoli si sovrappongono parzialmente. Precisamente, la figura risultante dalla sovrapposizione di due rettangoli adiacenti aventi un vertice in comune con un vertice V di P è un quadrilatero che ha un vertice in V ed è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'angolo di P con vertice V . Poiché in ciascuno dei cinque quadrilateri l'angolo opposto a quello di vertice V è congruente a quello di vertice V del pentagono, questi cinque quadrilateri possono essere assemblati in un pentagono Q simile a P , con cerchio inscritto di raggio 1 cm. I raggi dei cerchi inscritti nei due pentagoni Q e P sono dunque in rapporto $1 : 10$, quindi le aree dei due pentagoni sono in rapporto $1 : 100$. L'area di P è $75 \times 10 / 2 = 375 \text{ cm}^2$, dunque quella di Q è $3,75 \text{ cm}^2$. L'area cercata è dunque $75 - 3,75 = 71,25 \text{ cm}^2$.



J5. (18 punti) Considera il prodotto $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 2.025! \times 2.026!$.

Qual è il minimo numero di fattori del tipo $n!$ eliminando i quali il prodotto dei rimanenti risulta un quadrato perfetto?

(Per ogni intero positivo k , $k!$ denota il prodotto $1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times k$.)

Risposta: 2.

Svolgimento. Sia P il prodotto in questione. Chiaramente si ha

$$P = 2^{2.025} \times 3^{2.024} \times \dots \times 2025^2 \times 2026 = Q \times K$$

dove $Q = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2024 \times 2026$ e $K = 2^{2.024} \times 3^{2.024} \times 4^{2.022} \times 5^{2.022} \times \dots \times 2024^2 \times 2025^2$.

K è un quadrato perfetto. D'altra parte, si ha $Q = 2^{1.013} \times 1013!$. Poiché 1013 è un numero primo, affinché Q sia un quadrato perfetto dobbiamo rimuovere almeno $2 = 2!$ e $1013!$.

J6. (22 punti) Qual è il più piccolo numero reale $K > 1$ tale che, in ogni triangolo (non degenere), ci siano due lati il rapporto delle cui lunghezze sia compreso fra 1 e K ?

Risposta: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (sezione aurea).

Svolgimento. Siano $a \leq b \leq c$ le lunghezze dei tre lati: la situazione in cui i tre rapporti tra i lati coincidano (triangolo equilatero) non dà indicazioni.

Invece, se i due rapporti b/a e c/b coincidono, detto x il loro valore comune, la disuguaglianza triangolare $c < a + b$ impone che sia $x^2 - x - 1 < 0$, dunque $x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ciò implica che debba essere

$K \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, poiché per ogni valore di x con $1 \leq x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ esiste un triangolo di lati 1, x e x^2 .

Non può però essere $K > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, poiché se a, b e c sono tali che, ad esempio, $b/a > c/b > K > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, risulta $b < c/K$ e $a < b/K < c/K^2$ e quindi $a + b < c(1/K + 1/K^2)$, assurdo in quanto $1/K + 1/K^2 < 1$.