Kangourou della Matematica 2024
finale nazionale italiana
Cesenatico, 21 settembre 2024

LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

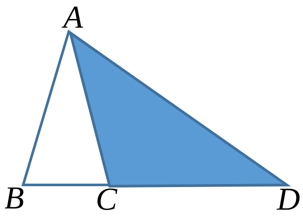
J1. (*5 punti*) Considera tutte le possibili frazioni di valore minore di 1, nelle quali sia il numeratore sia il denominatore sono numeri interi tra 1 e 12 inclusi. Sono di più le frazioni riducibili o quelle irriducibili?

Risposta: le irriducibili.

Svolgimento. Le frazioni in esame sono $\frac{132}{2} = 66$. Sono riducibili quelle il cui numeratore non è 1 e non è primo con il denominatore; quindi, incominciando dal denominatore 4: $1 + 0 + 3 + 0 + 3 + 2 + 5 + 0 + 7 = 21$.

J2. (*7 punti*) Sono dati due triangoli. Le lunghezze di due dei lati dell'uno coincidono con le lunghezze di due dei lati dell'altro e l'altezza relativa al terzo lato di uno coincide con quella relativa al terzo lato dell'altro. I due triangoli risultano necessariamente congruenti?

Risposta: no.



Svolgimento. La congruenza si avrebbe necessariamente se i triangoli fossero entrambi acutangoli (facile da provare: l'altezza relativa al terzo lato cadrebbe comunque all'interno del triangolo), ma non in generale. Si considerino per esempio i due triangoli *ABD* e *ACD* in figura, dove i segmenti *AB* e *AC* hanno la stessa lunghezza e *D* è allineato con *BC*: chiaramente non sono congruenti, e l'altezza relativa a *BD* per *ABD* coincide con quella relativa a *CD* per *ACD*.

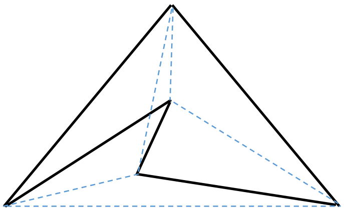
J3. (*11 punti*) Io non bevo caffè nei soli giorni di lunedì e sabato. Un aereo viene impiegato a giorni alterni sulle rotte Milano – Cagliari e Milano – Palermo con voli di andata e ritorno giornalieri operati settimanalmente dal martedì alla domenica inclusi; ogni lunedì è fermo per manutenzione. Nel corso di un anno ci sono stati due mesi consecutivi nell'arco dei quali ha operato complessivamente per 53 giorni, il primo dei quali su Cagliari. Nel primo giorno del primo di questi due mesi non ho bevuto caffè. È possibile stabilire su quale città l'aereo ha operato nel primo giorno di operatività del secondo mese? È possibile stabilire se tale giorno coincide con il primo giorno del mese?

Risposta: sì, su Cagliari; sì nel primo giorno del mese.

Svolgimento. 53 giorni di operatività significa in ogni caso 62 giorni complessivi (cioè due mesi di 31 giorni). Infatti in due mesi non ci sono mai meno di 8 lunedì, quindi se i giorni di operatività devono essere 53, i giorni complessivi sono almeno 61. Ma esattamente 61 con 8 lunedì significherebbe che il primo giorno del bimestre è martedì o mercoledì (e l'ultimo del secondo mese rispettivamente sabato o domenica) mentre, se nel primo giorno non ho bevuto caffè, tale giorno doveva essere *lunedì* o *sabato*. In entrambi i casi i giorni di rotta su Cagliari sono martedì, giovedì e sabato. Il primo giorno del secondo mese è, nel primo caso, giovedì, nel secondo, martedì, entrambi giorni operativi e di rotta su Cagliari.

J4. (*14 punti*) Per un poligono (piano) P, non necessariamente convesso, indichiamo con $N(P)$ il numero di punti che sono intersezioni di diagonali e non sono vertici. Se P è un quadrilatero, $N(P)$ può essere solo 1 oppure 0. Se P è un pentagono, il massimo valore possibile per $N(P)$ è 5 (ad esempio se P è regolare); qual è invece il minimo valore possibile? (In un qualunque poligono, per *diagonale* si intende un segmento che congiunge due vertici non adiacenti.)

Risposta: 0.
Svolgimento. La figura suggerisce una delle configurazioni possibili.



J5. (*18 punti*) Su un enorme foglio quadrato 2.024×2.024 di carta a quadretti si vogliono tracciare delle rette, nessuna parallela a quelle che delimitano i quadretti, in modo che tutti i vertici dei quadretti che appaiono sul foglio vengano coperti da almeno una retta. Qual è il più piccolo numero di rette che è sufficiente tracciare?

Risposta: 4048.
Svolgimento. Si possono tracciare le due diagonali del quadrato e tutte le 4.046 rette parallele a una sola di esse, sufficienti a coprire tutti i vertici dei quadretti non già coperti dalle diagonali. Un numero inferiore di rette non è sufficiente: basta osservare che i vertici dei quadretti che stanno sul bordo del quadrato grande sono 8.096 e che nessuna retta non parallela a qualche lato ne può coprire più di due.

J6. (*22 punti*) Esistono numeri interi palindromi di 4 cifre (cioè del tipo $ABBA$ con $A \neq 0$) in notazione decimale, che siano quadrati perfetti?

Risposta: No.
Svolgimento. Per assurdo, sia $ABBA = n^2$ per qualche n intero positivo. Osservando che $ABBA = 1.000A + 100B + 10B + A = 11(91A + 10B)$, oppure ricorrendo direttamente al criterio di divisibilità per 11, si vede che $ABBA$ deve essere multiplo di 11. Allora anche n deve essere multiplo di 11, cioè $n = 11k$ con k intero positivo, quindi $ABBA = n^2 = 121k^2$. Affinché $(11k)^2$ abbia 4 cifre, deve essere $3 \leq k \leq 9$: nessuno di questi sette numeri è palindromo.