Kangourou della Matematica 2024
finale nazionale italiana
Cesenatico, 21 settembre 2024

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) Nella strana lingua di Kanglandia, le parole "sì" e "no" si traducono in "*KAB*" e "*BAK*", ma non necessariamente in quest'ordine. Incontri una persona, della quale ti puoi fidare, che conosce sia l'italiano sia la lingua di Kanglandia e le chiedi: «È vero che *KAB* significa "sì"?». La persona risponde: "*KAB*". Puoi dedurre se "*KAB*" significa "sì" oppure "no"?

Risposta: no.

Svolgimento. La risposta sarebbe comunque "*KAB*" qualunque sia il suo significato.

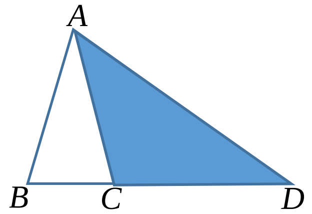
C2. (*7 punti*) Considera tutte le possibili frazioni di valore minore di 1, nelle quali sia il numeratore sia il denominatore sono numeri interi tra 1 e 12 inclusi. Sono di più le frazioni riducibili o quelle irriducibili?

Risposta: le irriducibili.

Svolgimento. Le frazioni in esame sono $\frac{132}{2} = 66$. Sono riducibili quelle il cui numeratore non è 1 e non è primo con il denominatore; quindi, incominciando dal denominatore 4: $1 + 0 + 3 + 0 + 3 + 2 + 5 + 0 + 7 = 21$.

C3. (*11 punti*) Sono dati due triangoli. Le lunghezze di due dei lati dell'uno coincidono con le lunghezze di due dei lati dell'altro e l'altezza relativa al terzo lato di uno coincide con quella relativa al terzo lato dell'altro. I due triangoli risultano necessariamente congruenti?

Risposta: no.



Svolgimento. La congruenza si avrebbe necessariamente se i triangoli fossero entrambi acutangoli (facile da provare: l'altezza relativa al terzo lato cadrebbe comunque all'interno del triangolo), ma non in generale. Si considerino per esempio i due triangoli *ABD* e *ACD* in figura, dove i segmenti *AB* e *AC* hanno la stessa lunghezza e *D* è allineato con *BC*: chiaramente non sono congruenti, e l'altezza relativa a *BD* per *ABD* coincide con quella relativa a *CD* per *ACD*.

C4. (*14 punti*) Tre abitazioni sono ai vertici di un triangolo isoscele i cui lati misurano 80, 80 e 120 metri. Utilizzando un'unica antenna, si vuole rendere possibile la ricezione di internet nelle tre abitazioni. Qual è, in metri, la minima distanza che può avere l'antenna dall'abitazione che le risulterà più lontana?

Risposta: 60.
Svolgimento. Certamente la minima distanza non può essere inferiore alla metà della lunghezza del lato più lungo (disuguaglianza triangolare). In effetti, collocando l'antenna a metà del lato lungo, la distanza dall'abitazione opposta sarebbe (Pitagora) $10 \times \sqrt{28} < 60$.

C5. (*18 punti*) Marco prova ad eseguire le seguenti operazioni: sceglie un numero di tre cifre tutte diverse fra loro, scrive il numero che ottiene invertendo l'ordine delle cifre e calcola la differenza fra il maggiore e il minore dei due numeri. Se questa differenza ha solo due cifre, premette a questa differenza la cifra 0, altrimenti la lascia inalterata. Infine, somma al numero così ottenuto il numero che ricava invertendo l'ordine delle sue cifre. Quale risultato ottiene? La nostra domanda lascia intendere che il risultato non dipende dal numero che Marco ha scelto inizialmente: spiega il motivo.

Risposta: 1089.
Svolgimento. L'enunciato lascia intendere che il risultato non dipende dal numero scelto inizialmente: si può allora partire ad esempio da 321, sottraendo 123 e ottenendo 198 a cui poi va sommato 891. Il motivo per il quale il risultato non dipende dalla scelta iniziale è il seguente. Sia ABC il numero iniziale: possiamo sempre supporre $A > C$. La differenza

$$ABC - CBA = (A \times 100 + B \times 10 + C) - (C \times 100 + B \times 10 + A)$$

si può riscrivere come

$$(A - C - 1) \times 100 + 9 \times 10 + (10 - A + C),$$

che permette di evidenziarne le cifre (certamente comprese tra 0 e 9 inclusi). Basta ora osservare che

$$[(A - C - 1) \times 100 + 9 \times 10 + (10 - A + C)] + [(10 - A + C) \times 100 + 9 \times 10 + (A - C - 1)] = 1.089,$$

per ogni valore delle cifre A e C.

C6. (*22 punti*) Su un enorme foglio quadrato 2.024×2.024 di carta a quadretti si vogliono tracciare delle rette, nessuna parallela a quelle che delimitano i quadretti, in modo che tutti i vertici dei quadretti che appaiono sul foglio vengano coperti da almeno una retta. Qual è il più piccolo numero di rette che è sufficiente tracciare?

Risposta: 4048.
Svolgimento. Si possono tracciare le due diagonali del quadrato e tutte le 4.046 rette parallele a una sola di esse, sufficienti a coprire tutti i vertici dei quadretti non già coperti dalle diagonali. Un numero inferiore di rette non è sufficiente: basta osservare che i vertici dei quadretti che stanno sul bordo del quadrato grande sono 8.096 e che nessuna retta non parallela a qualche lato ne può coprire più di due.