Kangourou della Matematica 2023
finale nazionale italiana
Cervia, 23 settembre 2023

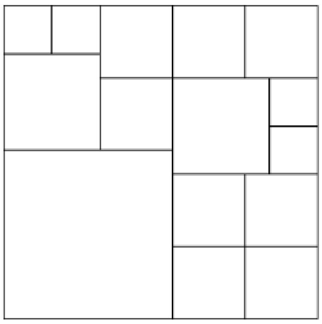
LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

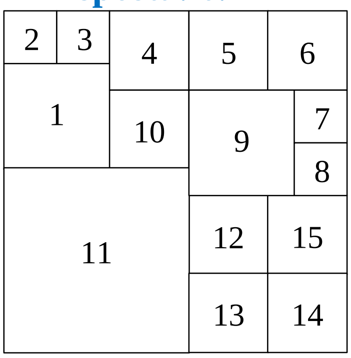
S1. (*5 punti*) Andrea e Giulio giocano a dadi nel modo seguente. Insieme lanciano sei dadi (tradizionali, equi): se esce 3 su almeno un dado, Andrea guadagna un euro da Giulio; in caso contrario, Giulio guadagna due euro da Andrea. È un gioco equo o è vantaggioso per uno dei due? In questo secondo eventuale caso, per chi?

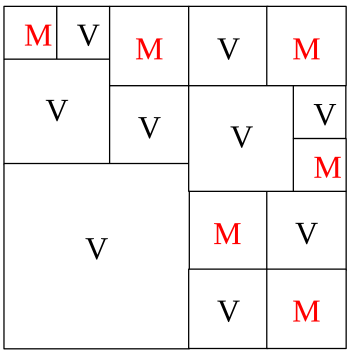
Svolgimento. Affinché il gioco sia equo, occorre che la probabilità che non esca alcun 3 sia 1/3. In realtà tale probabilità è $(5/6)^6$ che è maggiore di 1/3: infatti (calcolo non lungo) $3 \times 5^6 = 46.875 > 46.656 = 6^6$. Dunque Giulio è leggermente favorito.

S2. (*7 punti*) Un'isola è ripartita in 15 regioni come indicato nella figura. In ogni regione vive uno e un solo abitante che o dice sempre la verità o mente sempre. Ogni abitante afferma: "*Tra i miei vicini c'è almeno una persona che mente sempre*". Quanti possono essere al massimo gli abitanti che mentono sempre? (Due abitanti si intendono vicini quando le loro regioni condividono un segmento del loro bordo, non necessariamente un intero lato di una delle due.)



Risposta: 6.





Svolgimento. Numeriamo le regioni come indicato nella figura a sinistra. Due regioni "vicine" non possono contenere entrambe un mentitore. Quindi in ognuna delle tre terne {1, 2, 3}, {7, 8, 9} e {11,12,13} può esserci al più un mentitore, e così pure in ognuna delle tre coppie {4,10}, {5, 6} e {14, 15}. Allora i mentitori non possono essere più di 6. La seconda figura mostra una possibile situazione con 6 mentitori.

S3. (*11 punti*) Marco afferma di essere riuscito a costruire un poliedro (non degenere) tale che ogni sua sezione piana sia un triangolo (eventualmente degenere). Possiamo credergli?

Risposta: No.
Svolgimento. Assegnato un poliedro, se ne consideri uno spigolo S. Poiché in ogni vertice di tale spigolo confluiscono almeno altri due spigoli distinti, un piano parallelo allo spigolo S e sufficientemente vicino a S da intersecare entrambe le coppie di spigoli uscenti dagli estremi di S, determina una sezione piana del poliedro che ha almeno quattro vertici distinti.

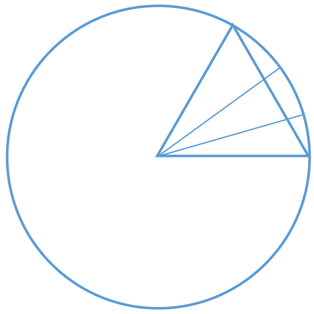
S4. (*14 punti*) Siano n un numero intero con $0 \leq n < 40$ e p un numero primo superiore a 5 tali che $p^2 + n$ sia divisibile per 40. Che cosa si può dire di n?

Risposta: $n = 39$ oppure $n = 31$, con entrambi i casi possibili.
Svolgimento. Ogni intero positivo è esprimibile in una delle forme $10k \pm i$ con k intero non negativo e i nell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ opportuni, dunque ogni numero primo p è esprimibile in una delle forme $10k \pm 1$ oppure $10k \pm 3$ con k intero non negativo opportuno e tutti e quattro i casi sono possibili (es. $p = 19$, $p = 11$, $p = 13$ e $p = 7$). Si ha allora $p^2 = 20k(5k \pm 1) + 1$ oppure $p^2 = 20k(5k \pm 3) + 9$. Poiché sia $k(5k \pm 1)$ sia k $(5k \pm 3)$ sono interi pari, il resto della divisione di p^2 per 40 può essere 1 oppure 9, da cui la tesi.

S5. (*18 punti*) Assegnati n punti distinti nel piano ($n \geq 2$), che cosa si può dire, al variare di n, sul numero delle coppie di tali punti che realizzano la massima distanza possibile?

Risposta: è al più n, potendo essere n se $n \geq 3$.
Svolgimento. Osserviamo che, se $n = 2$, c'è una sola coppia e quindi il numero di coppie è minore di n. Procediamo per induzione su n da $n = 3$, caso in cui la risposta è ovviamente vera.
Sia vero che, con $n - 1$ punti, le coppie non sono più di $n - 1$. Se nessuno degli n punti è estremo di più di due "segmenti massimali" (cioè i cui estremi realizzino la massima distanza possibile), le coppie non possono evidentemente essere più di n.
Esista invece un punto P che è estremo di tre segmenti massimali $[PQ]$, $[PR]$ e $[PS]$.
Osserviamo che, se $[AB]$ e $[CD]$ sono due segmenti massimali, devono necessariamente intersecarsi poiché, in caso contrario, la lunghezza di almeno una delle due diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$ supererebbe quella dei due segmenti.
Tenuto conto di ciò, si può concludere che esiste un punto che è estremo di esattamente un segmento massimale. Infatti, ogni coppia dei tre segmenti massimali $[PQ]$, $[PR]$ e $[PS]$ non può formare un angolo di misura superiore a 60° e quindi uno dei tre deve giacere internamente all'angolo formato dagli altri due.
Allora, se è R ad essere interno all'angolo QPS, per quanto visto sopra non può essere estremo di un segmento massimale diverso da $[PR]$ perché un tale segmento non potrebbe intersecare entrambi gli altri due. Sopprimendo il punto R ci si riporta a $n - 1$ punti, con al più altrettanti segmenti massimali.

Infine, un insieme di n punti con n segmenti massimali può essere costituito dai vertici di un triangolo equilatero e da $n-3$ punti qualsiasi sull'arco di 60 gradi della circonferenza centrata in uno dei tre vertici avente come estremi gli altri due.



S6. (*22 punti*) Sia n intero positivo fissato e siano $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ due sequenze di numeri non negativi tali che $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ per ogni k tra 1 e n inclusi. Mostrare che non è detto che si abbia

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2,$$

ma che questa seconda disuguaglianza vale certamente se entrambe le sequenze sono non crescenti.

Svolgimento. Senza l'ipotesi di monotonia la disuguaglianza sui quadrati è falsa: basta considerare le sequenze $\{1, 1\}$ e $\{0, 2\}$, opportunamente allungate con elementi uguali a zero nel caso $n > 0$. Si assuma invece tale ipotesi. Evidentemente

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) =$$
$$= (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) + (a_2 + b_2)(a_2 - b_2) + \ldots + (a_n + b_n)(a_n - b_n)$$

e $\{c_i\}_{i=1,\ldots,n} = \{a_i + b_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è una sequenza non crescente di numeri non negativi. Poniamo, per $k \leq n$

$$S_k = c_1(a_1 - b_1) + c_2(a_2 - b_2) + \ldots + c_k(a_k - b_k), \quad T_k = c_k[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_k - b_k)].$$

Per ipotesi $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_k - b_k) \geq 0$ per ogni k e quindi $T_k \geq 0$: basta allora provare che $S_n \geq T_n$. È banalmente vero che $S_1 \geq T_1$. Inoltre, dato che $\{c_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è monotona, risulta

$$T_{k-1} \geq c_k[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_{k-1} - b_{k-1})]$$

e quindi la disuguaglianza $S_{k-1} \geq T_{k-1}$ implica per ogni $k \leq n$

$$S_k = S_{k-1} + c_k (a_k - b_k) \geq T_{k-1} + c_k (a_k - b_k) \geq$$
$$\geq c_k[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_{k-1} - b_{k-1})] + c_k (a_k - b_k) = T_k$$

Dunque

$$S_n \geq T_n = (a_n + b_n)[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n)] \geq 0.$$

Osservazione. Notiamo che la richiesta di monotonia è meno forte della richiesta che, per ogni k, risulti $a_k \geq b_k$. Ad esempio, come sequenze non crescenti possiamo prendere $\{5,1\}$ e $\{3,2\}$, pur essendo il secondo termine della prima sequenza minore del secondo della seconda.