Kangourou della Matematica 2023
finale nazionale italiana
Cervia, 23 settembre 2023

LIVELLO BENJAMIN

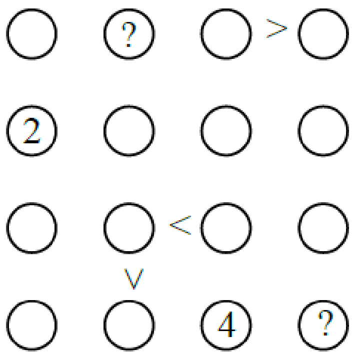
Tutte le risposte devono essere giustificate

B1. (*5 punti*) Ci sono 16 bottiglie identiche: 7 sono piene di latte, 6 sono piene a metà di latte e 3 sono vuote. Indica come puoi distribuire tutte queste bottiglie, senza modificarne il contenuto, fra quattro persone in modo che ciascuna ottenga la stessa quantità di latte e lo stesso numero di bottiglie.

Svolgimento. Ci sono 16 bottiglie e quindi a ciascuno ne devono toccare 4; inoltre c'è l'equivalente in latte di 10 bottiglie piene; quindi a ciascuno dei 4 deve toccare l'equivalente in latte di 2 bottiglie e mezza; ai primi tre si possono dare due bottiglie piene e una mezza ciascuno: visto che così hanno solo 3 bottiglie si deve dare a ciascuno una bottiglia vuota; al quarto si dà la restante bottiglia piena e le restanti 3 mezze bottiglie: così ha 4 bottiglie.

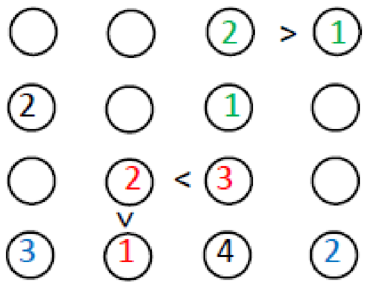
B2. (*7 punti*) In ogni casella dello schema in figura deve comparire uno dei numeri 1, 2, 3, 4 in modo che
- ognuno di essi appaia una sola volta in ogni riga e in ogni colonna;
- i tre simboli ">" di "maggiore" o "<" di "minore" che compaiono risultino posti in modo corretto rispetto ai numeri ospitati nelle due caselle tra le quali sono inseriti.

Due caselle sono già state occupate. Qual è la somma dei numeri da inserire nelle due caselle con il punto di domanda?



Risposta: 5.

Svolgimento. Affinché siano rispettati i segni di disuguaglianza, il terzo numero (da sinistra) della terza riga deve essere 3 e il secondo 2, obbligando 1 come secondo numero della quarta riga. Il primo numero della quarta riga deve essere allora 3 (non può essere 2 perché già presente nella prima colonna), quindi il quarto deve essere 2. Il primo elemento sulla terza colonna deve essere 2, in quanto minore di 3, ma maggiore di un altro numero, che sarà 1. Ciò forza 4 nel quarto posto della terza riga e quindi nel primo della prima riga. Ne segue che il secondo numero nella prima riga è 3.



B3. (*11 punti*) Cinque ragazze e quattro ragazzi hanno partecipato ad una gara dove non erano previste posizioni di pari merito. Il primo posto in classifica è toccato ad una ragazza; sommando i numeri delle posizioni delle ragazze si ottiene il doppio della somma dei numeri delle posizioni dei ragazzi. In che posizione si è classificato l'ultimo dei ragazzi?

Risposta: Sesta.
Svolgimento. La somma dei numeri di tutte le posizioni è 45: allora la somma relativa alle ragazze è 30, quella relativa ai ragazzi è 15. Poiché $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, l'unico modo per ottenere 15 è sostituire 5 con 6.

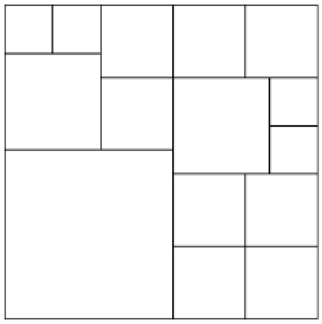
B4. (*14 punti*) Si vogliono collocare alcuni gettoni in altrettante celle quadrate di una griglia 2×9 in modo che ogni cella o contenga un gettone o condivida un lato con qualche cella che contenga un gettone. Qual è il minimo numero di gettoni che consente di raggiungere lo scopo?

Risposta: 5.
Svolgimento. Una cella che contenga un gettone ne può "sistemare" al massimo altre tre: allora 4 gettoni non possono bastare. Ne bastano 5: per esempio se ne può disporre uno nelle celle 1, 5 e 9 della prima riga e uno nelle celle 3 e 7 della seconda.

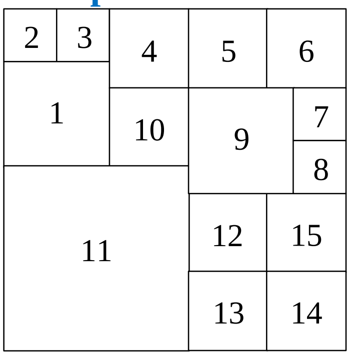
B5. (*18 punti*) Per formare un codice segreto, le 21 lettere dell'alfabeto italiano (dunque senza le lettere *K*, *J*, *X*, *Y*, *W*), scritte nell'ordine dell'alfabeto, sono state numerate progressivamente partendo da una lettera che non è necessariamente la *A* e ricominciando con la *A* dopo la *Z* (ad esempio, se la lettera *E* fosse la numero 1, la *F* sarebbe la numero 2, la *Z* la numero 17 e la *A* la numero 18 fino ad arrivare alla *D*, la numero 21). La somma dei numeri assegnati alle lettere *P*, *Q*, *R*, *S* è 44. A quale parola corrisponde il codice (3, 1, 11)?

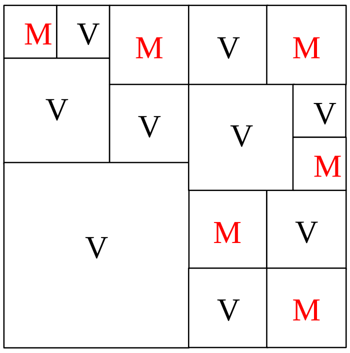
Risposta: TRE.
Svolgimento. Se i numeri assegnati a *P*, *Q*, *R*, *S* fossero consecutivi, detto n il numero assegnato a *P*, dovrebbe essere $4n + 6 = 44$, impossibile. Allora a una di queste lettere è stato assegnato il numero 21 e alla successiva il numero 1: la loro somma è 22 e quindi bisogna che anche la somma delle altre due sia 22. Quindi 21 è stato attribuito a *Q* da cui facilmente si risale alla parola *TRE*.

B6. (*22 punti*) Un'isola è ripartita in 15 regioni come indicato nella figura. In ogni regione vive uno e un solo abitante che o dice sempre la verità o mente sempre. Ogni abitante afferma: "*Tra i miei vicini c'è almeno una persona che mente sempre*". Quanti possono essere al massimo gli abitanti che mentono sempre? (Due abitanti si intendono vicini quando le loro regioni condividono un segmento del loro bordo, non necessariamente un intero lato di una delle due.)



Risposta: 6.





Svolgimento. Numeriamo le regioni come indicato nella figura a sinistra. Due regioni "vicine" non possono contenere entrambe un mentitore. Quindi in ognuna delle tre terne {1, 2, 3}, {7, 8, 9} e {11,12,13} può esserci al più un mentitore, e così pure in ognuna delle tre coppie {4,10}, {5, 6} e {14, 15}. Allora i mentitori non possono essere più di 6. La seconda figura mostra una possibile situazione con 6 mentitori.