Kangourou della Matematica 2025
finale nazionale italiana
Cesenatico, 20 settembre 2025

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) Sulle dita di una mano, Silvia ha contato nel modo seguente: 1 pollice, 2 indice, 3 medio, 4 anulare, 5 mignolo; poi è tornata indietro: 6 anulare, 7 medio, 8 indice, 9 pollice. Quindi è ripartita: 10 indice, 11 medio e così via, fino a quando è arrivata a 999. Su quale dito?

Risposta: **medio.**

Svolgimento. Se un numero n è contato su un certo dito della mano, su quel dito viene certamente contato anche il numero $n + 8$. 1.000 è divisibile per 8, dunque a 1.001 sarebbe toccato lo stesso dito che è toccato a 1, cioè il pollice: Silvia si è fermata due numeri prima, dunque al dito medio.

C2. (*7 punti*) Un parco circolare è circondato da un sentiero illuminato da lampioni. Simona e Tania hanno contato i lampioni, ma separatamente, partendo da punti diversi e muovendosi entrambe nello stesso verso. Quello che è stato il 20-esimo lampione per Simona è stato il 7-mo per Tania, quello che è stato il 7-mo per Simona è stato il 94-esimo per Tania. Quanti sono complessivamente i lampioni?

Risposta: **100.**

Svolgimento. Tania è in ritardo di 13 lampioni nel conteggio quindi il lampione che lei conta 94-esimo, dovrebbe essere il 107-esimo per Simona se proseguisse nel conteggio oltre il primo giro. Simona però l'ha già incontrato per 7-mo nel primo giro: quindi i lampioni sono 100.

C3. (*11 punti*) Due interi positivi a e b sono tali che la loro somma è uguale al prodotto dei due numeri primi 283 e 353. Per quali coppie (a, b) si ha che b divide a?

Risposta: **(99.898,1), (99.616, 283) e (99.546, 353).**

Svolgimento. Se b divide a, allora $a = kb$. Da cui $a + b = kb + b = (k + 1)b$ è multiplo di b, quindi b deve essere un divisore di $99.899 = 283\times353$. Ma gli unici divisori di 99.899 sono 1, 283, 353 e 99.899. Le tre coppie (a, b) sono (99.898,1), (99.616, 283) e (99.546, 353). NOTA: per $b = 99.899$ avremmo $a = 0$ che non è accettabile.

C4. (*14 punti*) Un orto botanico rettangolare di dimensioni 52×24 metri è ripartito in appezzamenti quadrati tutti della stessa dimensione e tutti con i lati paralleli a quelli dell'orto. Internamente all'orto gli appezzamenti sono separati da reticolati; la lunghezza complessiva dei reticolati è 1.172 metri. Quanti sono gli appezzamenti quadrati?

Risposta: **312.**

Svolgimento. Incominciamo a supporre che i lati degli appezzamenti abbiano lunghezza intera (in metri). I divisori interi comuni a 52 e 24 sono solo 1, 2 e 4. Se i lati misurassero 1, la lunghezza complessiva della rete sarebbe $52 \times 23 + 24 \times 51 = 2.420$, quindi maggiore di 1.172. Con i lati che misurano 2, la lunghezza della rete sarebbe appunto $52 \times 11 + 24 \times 25 = 1.172$. Con i lati che misurano 4, la lunghezza della rete sarebbe $52 \times 5 + 24 \times 12 = 548$. Se la lunghezza dei lati non fosse intera, il numero di spezzoni di ciascuna delle due lunghezze sarebbe maggiore rispettivamente di 11 e di 25 se il lato misurasse meno di 2 metri, minore se il lato misurasse più di 2 metri: quindi la lunghezza complessiva della rete sarebbe in un caso maggiore, nell'altro minore, di 1.172 metri.

C5. (*18 punti*) In un'isola ci sono solo Cavalieri e Furfanti: i Cavalieri sono persone che dicono sempre la verità, mentre i Furfanti mentono sempre, ed è noto a tutti nell'isola chi sono i Cavalieri e chi sono i Furfanti. Oggi 25 abitanti dell'isola sono in attesa nella sala di ricevimento del Re. Questa sala è un quadrato di lato 5 metri ed è pavimentata con 25 mattonelle quadrate di lato 1 metro, numerate da 1 a 25. Ogni persona attende in piedi su una mattonella, una sola persona per mattonella. Mentre aspettano, ognuna delle 25 persone dichiara: "Nelle mattonelle adiacenti alla mia ci sono tanti furfanti quanti cavalieri". Quante *diverse* disposizioni di cavalieri e furfanti sono possibili?
NOTA: Due mattonelle sono adiacenti se hanno un intero lato in comune. Due disposizioni sono diverse se, per almeno un numero, la corrispondente mattonella è occupata in una disposizione da un Cavaliere, nell'altra da un Furfante.

Risposta: **6 disposizioni.**

Svolgimento. Le mattonelle sul bordo che non sono negli angoli hanno 3 mattonelle adiacenti, quindi un numero dispari. La dichiarazione di chi sta in queste mattonelle è sicuramente falsa, si tratta quindi di furfanti. Questo implica che anche nei quattro angoli si trovano quattro furfanti, avendo solo due vicini, entrambi furfanti. La situazione illustrata

F	*F*	*F*	*F*	*F*
F				*F*
F				*F*
F				*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*

è compatibile con sei sole disposizioni:

A) Anche i restanti 9 presenti sono furfanti.
B) C'è un solo altro furfante al centro del quadrato, circondato da una corona di cavalieri.
C) C'è un quadrato 2×2 in uno dei quattro angoli del quadrato 3×3 in cui stanno 4 cavalieri e i restanti 5 sono furfanti.

C6. (*22 punti*) Due punti sulla circonferenza di un cerchio Γ (*leggi GAMMA*) sono estremi di un arco δ (*leggi DELTA*) di un'altra circonferenza. L'arco δ ripartisce il cerchio Γ in due regioni di uguale area. È necessariamente vero che δ è più lungo del diametro di Γ?

Risposta: **Sì.**

Svolgimento. Siano P e Q i due estremi (necessariamente non diametrali) di δ e sia Δ il cerchio della cui circonferenza δ è un arco. Dall'ipotesi sulle aree è chiaro che δ non può essere contenuto in alcun semicerchio di Γ: allora il centro C di Γ è interno a Δ e il diametro PS di Γ che ha P come un estremo interseca δ in un punto R che deve necessariamente appartenere al segmento CS. Chiaramente δ è più lungo di $|PR| + |RQ|$: la tesi segue allora dal fatto che $|RQ| > |RS|$ in quanto il cerchio di centro R e raggio RS è contenuto in Γ.