Kangourou della Matematica 2025
finale nazionale italiana
Cesenatico, 20 settembre 2025

LIVELLO BENJAMIN

Tutte le risposte devono essere giustificate

B1. (*5 punti*) Qual è il più piccolo numero intero positivo la somma delle cui cifre è 100? Spiega come l'hai determinato.

Risposta: 199.999.999.999.

Svolgimento. Il numero cercato deve avere il minor numero possibile di cifre, dunque la cifra 9 deve comparire il maggior numero di volte possibile. Si ha $100 = 9 \times 11 + 1$. Allora 1 deve essere la prima cifra e le rimanenti undici cifre devono essere 9.

B2. (*7 punti*) Sulle dita di una mano, Silvia ha contato nel modo seguente: 1 pollice, 2 indice, 3 medio, 4 anulare, 5 mignolo; poi è tornata indietro: 6 anulare, 7 medio, 8 indice, 9 pollice. Quindi è ripartita: 10 indice, 11 medio e così via, fino a quando è arrivata a 999. Su quale dito?

Risposta: medio.

Svolgimento. Se un numero n è contato su un certo dito della mano, su quel dito viene certamente contato anche il numero $n + 8$. 1.000 è divisibile per 8, dunque a 1.001 sarebbe toccato lo stesso dito che è toccato a 1, cioè il pollice: Silvia si è fermata due numeri prima, dunque al dito medio.

B3. (*11 punti*) Su un tavolo sono disposte sette monete in fila come in figura.

Alice e Bob a turno prendono una delle monete all'estrema sinistra o all'estrema destra della fila. Se ad esempio Alice inizia prendendo la moneta da 50 centesimi all'estrema destra, allora Bob può scegliere tra la 50 centesimi all'estrema sinistra e la 10 centesimi rimasta all'estrema destra. Alice sceglie per prima e poi si alternano nella scelta, rispettando la regola in ogni fila che viene successivamente determinata: in questo modo Alice alla fine avrà preso quattro monete e Bob solo tre.

- **a)** Se entrambi agiscono in modo da ottenere la quantità di denaro MASSIMA possibile, con quanti centesimi di euro terminerà Bob?
- **b)** Se invece entrambi agiscono in modo da ottenere la quantità di denaro MINIMA possibile, con quanti centesimi di euro terminerà Bob?

Risposta: a) 260 centesimi; b) 60 centesimi.

Svolgimento. Nel primo caso Bob può prendere la moneta simmetrica a quella presa da Alice, non lasciandole sostanzialmente alcuna scelta. Nel momento in cui Alice prende una delle due monete da 5 centesimi, allora Bob prende la moneta da 2 euro. Totale $50 + 10 + 200 = 260$.

Nel secondo caso, dopo che Alice ha preso una moneta da 50 centesimi, a Bob conviene prendere l'altra da 50 centesimi. Se infatti prendesse quella da 10 centesimi disponibile, allora Alice prenderebbe quella da 5 e Bob comunque dovrebbe prendere poi quella da 50 centesimi. Scegliendo invece alla seconda mossa quella da 50 centesimi, si assicura di poter prendere poi le due monete da 5 centesimi, per un totale di 60 centesimi.

B4. (*14 punti*) Un parco circolare è circondato da un sentiero illuminato da lampioni. Simona e Tania hanno contato i lampioni, ma separatamente, partendo da punti diversi e muovendosi entrambe nello stesso verso. Quello che è stato il 20-esimo lampione per Simona è stato il 7-mo per Tania, quello che è stato il 7-mo per Simona è stato il 94-esimo per Tania. Quanti sono complessivamente i lampioni?

Risposta: 100.

Svolgimento. Tania è in ritardo di 13 lampioni nel conteggio quindi il lampione che lei conta 94-esimo, dovrebbe essere il 107-esimo per Simona se proseguisse nel conteggio oltre il primo giro. Simona però l'ha già incontrato per 7-mo nel primo giro: quindi i lampioni sono 100.

B5. (*18 punti*) A ogni numero intero tra 1 e 9 inclusi è assegnato uno e uno solo dei colori rosso, blu, verde in modo che ogni numero rosso sia la somma di un numero verde e di un numero blu. Quanti possono essere al massimo i numeri rossi?

Risposta: 4.

Svolgimento. Sicuramente possono essere 4: ad esempio 1, 2 e 3 blu, 4 e 6 verdi, 5, 7, 8 e 9 rossi. Dimostriamo che non possono essere più di 4. Effettuata una assegnazione, siano R, B e V rispettivamente le quantità dei numeri rossi, blu e verdi, dunque con $R + B + V = 9$. Sia per assurdo $R \geq 5$, dunque $B + V \leq 4$: le coppie non ordinate (B, V) possibili sono 4, (1, 3), (2, 2), (1, 2) e (1, 1); le diverse somme prodotte da queste coppie sono al più 4, troppo poche per assegnare il colore rosso alle (almeno) 5 cifre mancanti.

B6. (*22 punti*) In un'isola ci sono solo Cavalieri e Furfanti: i Cavalieri sono persone che dicono sempre la verità, mentre i Furfanti mentono sempre, ed è noto a tutti nell'isola chi sono i Cavalieri e chi sono i Furfanti. Oggi 16 abitanti dell'isola sono in attesa nella sala di ricevimento del Re. Questa sala è un quadrato di lato 4 metri ed è pavimentata con 16 mattonelle quadrate di lato 1 metro. Ogni persona attende in piedi su una mattonella, una sola persona per mattonella. Mentre aspettano, ognuna delle 16 persone dichiara: "Nelle mattonelle adiacenti alla mia ci sono tanti furfanti quanti cavalieri". Quanti possono essere al massimo i cavalieri?
NOTA: Due mattonelle sono adiacenti se hanno un intero lato in comune.

Risposta: 4.

Svolgimento. Le mattonelle di bordo che non sono negli angoli hanno 3 mattonelle vicine, quindi un numero dispari. La dichiarazione di chi sta in queste mattonelle è sicuramente falsa, si tratta quindi di furfanti. Questo implica che anche nei quattro angoli si trovano quattro furfanti, avendo solo due vicini, entrambi furfanti. Nella situazione illustrata a lato le quattro caselle centrali possono essere occupate da 4 cavalieri senza violare alcun vincolo.

F	*F*	*F*	*F*
F			*F*
F			*F*
F	*F*	*F*	*F*