Kangourou della Matematica 2025
finale nazionale italiana
Cesenatico, 20 settembre 2025

LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) Per $a < b$ numeri razionali, l'insieme, che denoteremo con $R[a; b]$, si dice intervallo chiuso razionale se contiene tutti e soli i numeri razionali compresi fra a e b, a e b inclusi. Dimostra o confuta la seguente affermazione:

"*Se* $\{A_n\} = \{R[a_n; b_n]\}_{(n = 1, 2, \ldots)}$ *è una successione di intervalli chiusi razionali e inscatolati (cioè* $A_{n+1} \subseteq A_n$ *per ogni n), allora l'intersezione degli* A_n *non può essere vuota.*"

Risposta: Falso.

Svolgimento. Sia, ad esempio,

$$A_1 = R[3; 4],\ A_2 = R[3{,}1; 3{,}2],\ A_3 = R[3{,}14; 3{,}15],\ \ldots,\ A_n = R[a_n; b_n],\ \ldots$$

la successione ottenuta utilizzando, nel modo suggerito, le cifre della rappresentazione decimale di π, cioè a_n sia la sua troncatura al posto $n - 1$ e b_n sia la troncatura al posto $n - 1$ con la cifra di posto $n - 1$ aumentata di 1; in presenza della cifra 9 si può omettere l'intervallo relativo poiché le cifre di π non sono definitivamente 9. La differenza $b_n - a_n$ può essere resa arbitrariamente piccola al crescere di n, dunque l'intersezione non potrebbe contenere più di un numero. D'altra parte, per questo motivo nel campo reale l'intersezione degli intervalli $[a_n; b_n]$ darebbe solo π che risulta contenuto in tutti gli intervalli, dunque nel campo razionale è vuota.

S2. (*7 punti*) In quanti modi diversi si può ottenere 270 sommando interi positivi consecutivi?

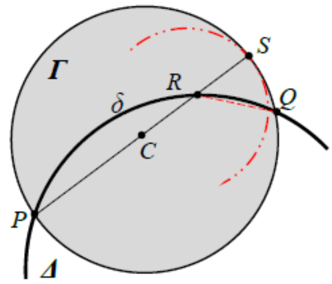
Risposta: 7.

Svolgimento. Se gli addendi consecutivi sono in numero dispari, l'addendo centrale è la loro media: i divisori dispari 3, 5, 9 e 15 di 270 (con quozienti rispettivamente 90, 54, 30 e 18 > 15) forniscono altrettanti modi; 27 e i successivi non sono accettabili.
Se sono in numero pari, si possono distribuire a coppie di ugual somma S. S deve essere un divisore di 270, dispari poiché il minore e il maggiore degli addendi hanno diversa parità. Ci sono solo tre possibilità per S: $135 = 3^3 \times 5$ (con 4 addendi, da 66 a 69), 45 (con 12 addendi, da 17 a 28) e 27 (con 20 addendi, da 4 a 23) e nessun'altra, poiché $15 = 1+14$ dà luogo al più a 7 coppie di addendi, la cui somma è 105 (e similmente per divisori inferiori).
In alternativa. Se gli addendi sono in-numero pari $2n$, poiché la somma di due addendi consecutivi è dispari e 270 è pari, anche n deve essere pari, ma non multiplo di 4 perché 270 non lo è (due somme consecutive di cui sopra distano di 4). Con $n = 2$ si ha $67 + 68 = 135$ che fornisce $66 + 67 + 68 + 69 = 270$, con $n = 6$ si ha $22 + 23 = 45$ che fornisce $17 + 18 + \ldots + 27 + 28 = 270$, con $n = 10$ si ha $13 + 14 = 27$ che fornisce $4 + 5 + \ldots + 22 + 23 = 270$. $n = 18$ e i successivi non sono accettabili.

S3. (*11 punti*) Due punti sulla circonferenza di un cerchio *Γ* (*leggi GAMMA*) sono estremi di un arco *δ* (*leggi DELTA*) di un'altra circonferenza. L'arco *δ* ripartisce il cerchio *Γ* in due regioni di uguale area. È necessariamente vero che *δ* è più lungo del diametro di *Γ*?

Risposta: **Sì.**

Svolgimento. Siano *P* e *Q* i due estremi (necessariamente non diametrali) di *δ* e sia *Δ* il cerchio della cui circonferenza *δ* è un arco. Dall'ipotesi sulle aree è chiaro che *δ* non può essere contenuto in alcun semicerchio di *Γ*: allora il centro *C* di *Γ* è interno a *Δ* e il diametro *PS* di *Γ* che ha *P* come un estremo interseca *δ* in un punto *R* che deve necessariamente appartenere al segmento *CS*. Chiaramente *δ* è più lungo di $|PR| + |RQ|$: la tesi segue allora dal fatto che $|RQ| > |RS|$ in quanto il cerchio di centro *R* e raggio *RS* è contenuto in *Γ*.



S4. (*14 punti*) Io e un mio amico facciamo il seguente gioco. Su un tavolo ci sono quattro mazzetti di 7 carte ciascuno, delle quali 4 sono rosse e 3 sono verdi, mescolate casualmente. Ciascun giocatore gioca con un mazzo, diverso dal mazzo dell'altro, e pesca da esso una carta a caso. I quattro mazzi assegnano punteggi diversi al giocatore a seconda che estragga una carta rossa o una verde: nello specifico, il primo mazzo assegna 6 punti e 2 punti rispettivamente all'estrazione di una carta rossa e di una verde, il secondo mazzo 5 punti e 5 punti, il terzo mazzo 4 punti e 7 punti, il quarto mazzo 3 punti e 3 punti. Naturalmente vince chi realizza il punteggio più alto.

a) Se io posso scegliere per primo un mazzo e il mio amico invece deve pescare a caso uno dei restanti tre mazzi (ed entrambi dobbiamo ancora giocare), che mazzo mi conviene scegliere?

b) Se entrambi possiamo scegliere il mazzo con cui giocare (e la scelta deve essere fatta prima di giocare), mi conviene essere il primo o il secondo a scegliere?

Risposta: **a)** **Il terzo;** **b)** **Il secondo.**

Svolgimento. **a)** Se scelgo il primo mazzo la probabilità di fare 6 è $\frac{4}{7}$, se scelgo il secondo realizzo certamente 5, se scelgo il terzo la probabilità di fare 7 (dunque di vincere comunque) è $\frac{3}{7}$. Tenuto conto che il mio amico pesca il mazzo a caso,

- se scelgo il primo, vinco se pesco una carta rossa e se il mio amico non pesca una carta verde dal terzo mazzo, dunque con probabilità $\frac{4}{7} \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}\right) = \frac{24}{49}$;
- ragionando in modo analogo, se scelgo il secondo, totalizzo certamente 5 punti e la probabilità di vincere è $1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\right) = \frac{2}{3}$;
- se scelgo il terzo, la probabilità di vincere è $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{7} + 1\right) = \frac{1}{7}\left(3 + \frac{4}{3} \times \frac{10}{7}\right) = \frac{103}{147} > \frac{2}{3}$;
- se scelgo il quarto totalizzo certamente 3 punti e la probabilità di vincere è $\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$.

b) Qualunque sia la scelta del mio amico, scegliendo io un mazzo opportuno fra i rimanenti ho probabilità di vincere maggiore di $\frac{1}{2}$. Infatti: se il mio amico ha scelto il primo, dunque con probabilità $\frac{4}{7}$ di totalizzare 6, io posso scegliere il terzo che mi dà probabilità $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{33}{49}$ di vincere; se il mio amico ha scelto il secondo, totalizzando comunque 5 punti, io posso scegliere il primo che mi dà probabilità $\frac{4}{7}$ di vincere; se il mio amico ha scelto il terzo, dunque con probabilità $\frac{3}{7}$ di totalizzare 7, io posso scegliere il secondo che mi dà probabilità $\frac{4}{7}$ di superarlo; se il mio amico ha scelto il quarto, scegliendo il secondo o il terzo sono certo di vincere.
Il computo delle probabilità può essere fatto anche determinando quante, fra le coppie di carte estraibili, sono favorevoli all'uno o all'altro.

S5. (*18 punti*) Dimostra o confuta la seguente affermazione. "Per ogni intero $n \geq 3$ esistono n numeri interi tutti diversi fra loro tali che ciascuno di essi divida la somma dei restanti $n - 1$."

Risposta: L'affermazione è vera.

Svolgimento. Lo è per $n = 3$ (basta considerare la terna $\{1, 2, 3\}$). Ora si può procedere induttivamente aggiungendo ad ogni n-upla $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ che soddisfi la condizione la somma S di tutti gli elementi della n-upla stessa. Infatti per la $(n+1)$-upla $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, S\}$ accade che, per ipotesi, $S_i = x_1 + x_2 + \ldots x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n$ risulta divisibile per x_i qualunque sia i tra 1 e n, quindi $S_i + S = 2S_i + x_i$ è divisibile per x_i qualunque sia i tra 1 e n e, ovviamente, S divide S.

S6. (*22 punti*) Si consideri l'insieme ordinato $S = (1, 2, \ldots, n)$ dei primi n interi positivi e sia n sufficientemente grande per poter realizzare quanto segue. Si vuole selezionare un sottoinsieme ordinato di S (cioè che erediti l'ordine da quello di S) di 10 elementi tali che il secondo disti almeno 1 dal primo, il terzo disti almeno 2 dal secondo, il quarto almeno 3 dal terzo e così via fino al decimo che disti almeno 9 dal nono. *Attenzione*: *non si chiede che la distanza tra un numero scelto e il precedente numero scelto sia crescente al crescere del numero scelto*; ad esempio il secondo potrebbe distare 5 dal primo e il terzo potrebbe distare 2 dal secondo.

Al variare di n (ammissibile), quante diverse scelte sono possibili?

Risposta: $(n - 36)!/((n - 46)! \times 10!)$.

Svolgimento. È ovvio che deve essere $n > 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ e che per $n = 46$ una sola scelta è possibile.
Se $(k_1, k_2, \ldots, k_{10})$ è una scelta ammissibile, risulta

$$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 - 1 < k_4 - 3 < \ldots < k_9 - 28 < k_{10} - 36 \leq n - 36:$$

la successione $\{k_1, k_2, k_3 - 1, k_4 - 3, \ldots, k_9 - 28, k_{10} - 36\}$ è dunque una sotto-successione strettamente crescente della successione $\{1, 2, 3, \ldots, n - 36\}$. Tali sotto-successioni sono in numero di $\frac{(n-36)!}{(n-46)!\times 10!}$ (numero dei sottoinsiemi di 10 elementi di un insieme di $n - 36$ elementi, ognuno dei quali viene ordinato in un solo modo). Viceversa, ogni tale sotto-successione individua una e una sola scelta ammissibile, ottenibile sommando 2 a k_2, 3 a k_3, …, 9 a k_9.