Kangourou della Matematica 2025
finale nazionale italiana
Cesenatico, 20 settembre 2025

LIVELLO JUNIOR

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

J1. (*5 punti*) Un parco circolare è circondato da un sentiero illuminato da lampioni. Simona e Tania hanno contato i lampioni, ma separatamente, partendo da punti diversi e muovendosi entrambe nello stesso verso. Quello che è stato il 20-esimo lampione per Simona è stato il 7-mo per Tania, quello che è stato il 7-mo per Simona è stato il 94-esimo per Tania. Quanti sono complessivamente i lampioni?

Risposta: **100.**

Svolgimento. Tania è in ritardo di 13 lampioni nel conteggio quindi il lampione che lei conta 94-esimo, dovrebbe essere il 107-esimo per Simona se proseguisse nel conteggio oltre il primo giro. Simona però l'ha già incontrato per 7-mo nel primo giro: quindi i lampioni sono 100.

J2. (*7 punti*) Un orto botanico rettangolare di dimensioni 52×24 metri è ripartito in appezzamenti quadrati tutti della stessa dimensione e tutti con i lati paralleli a quelli dell'orto. Internamente all'orto gli appezzamenti sono separati da reticolati; la lunghezza complessiva dei reticolati è 1.172 metri. Quanti sono gli appezzamenti quadrati?

Risposta: **312.**

Svolgimento. Incominciamo a supporre che i lati degli appezzamenti abbiano lunghezza intera (in metri). I divisori interi comuni a 52 e 24 sono solo 1, 2 e 4. Se i lati misurassero 1, la lunghezza complessiva della rete sarebbe $52 \times 23 + 24 \times 51 = 2.420$, quindi maggiore di 1.172. Con i lati che misurano 2, la lunghezza della rete sarebbe appunto $52 \times 11 + 24 \times 25 = 1.172$. Con i lati che misurano 4, la lunghezza della rete sarebbe $52 \times 5 + 24 \times 12 = 548$. Se la lunghezza dei lati non fosse intera, il numero di spezzoni di ciascuna delle due lunghezze sarebbe maggiore rispettivamente di 11 e di 25 se il lato misurasse meno di 2 metri, minore se il lato misurasse più di 2 metri: quindi la lunghezza complessiva della rete sarebbe in un caso maggiore, nell'altro minore, di 1.172 metri.

J3. (*11 punti*) In quanti modi diversi si può ottenere 270 sommando interi positivi consecutivi?

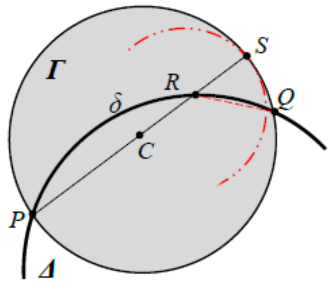
Risposta: **7.**

Svolgimento. Se gli addendi consecutivi sono in numero dispari, l'addendo centrale è la loro media: i divisori dispari 3, 5, 9 e 15 di 270 (con quozienti rispettivamente 90, 54, 30 e 18 > 15) forniscono altrettanti modi; 27 e i successivi non sono accettabili.
Se sono in numero pari, si possono distribuire a coppie di ugual somma S. S deve essere un divisore di 270, dispari poiché il minore e il maggiore degli addendi hanno diversa parità. Ci sono solo tre possibilità per S: 135 = $3^3 \times 5$ (con 4 addendi, da 66 a 69), 45 (con 12 addendi, da 17 a 28) e 27 (con 20 addendi, da 4 a 23) e nessun'altra, poiché 15 = 1+14 dà luogo al più a 7 coppie di addendi, la cui somma è 105 (e similmente per divisori inferiori).
In alternativa. Se gli addendi sono in-numero pari $2n$, poiché la somma di due addendi consecutivi è dispari e 270 è pari, anche n deve essere pari, ma non multiplo di 4 perché 270 non lo è (due somme consecutive di cui sopra distano di 4). Con $n = 2$ si ha 67 + 68 = 135 che fornisce 66 + 67 + 68 + 69 = 270, con $n = 6$ si ha 22 + 23 = 45 che fornisce 17 + 18 + … + 27 + 28 = 270, con $n = 10$ si ha 13 + 14 = 27 che fornisce 4 + 5 + … + 22 + 23 = 270. $n = 18$ e i successivi non sono accettabili.

J4. (*14 punti*) Due punti sulla circonferenza di un cerchio Γ (*leggi GAMMA*) sono estremi di un arco δ (*leggi DELTA*) di un'altra circonferenza. L'arco δ ripartisce il cerchio Γ in due regioni di uguale area. È necessariamente vero che δ è più lungo del diametro di Γ?

Risposta: **Sì.**

Svolgimento. Siano P e Q i due estremi (necessariamente non diametrali) di δ e sia Δ il cerchio della cui circonferenza δ è un arco. Dall'ipotesi sulle aree è chiaro che δ non può essere contenuto in alcun semicerchio di Γ: allora il centro C di Γ è interno a Δ e il diametro PS di Γ che ha P come un estremo interseca δ in un punto R che deve necessariamente appartenere al segmento CS. Chiaramente δ è più lungo di $|PR| + |RQ|$: la tesi segue allora dal fatto che $|RQ| > |RS|$ in quanto il cerchio di centro R e raggio RS è contenuto in Γ.



J5. (*18 punti*) Io e un mio amico facciamo il seguente gioco. Su un tavolo ci sono quattro mazzetti di 7 carte ciascuno, delle quali 4 sono rosse e 3 sono verdi, mescolate casualmente. Ciascun giocatore gioca con un mazzo, diverso dal mazzo dell'altro, e pesca da esso una carta a caso. I quattro mazzi assegnano punteggi diversi al giocatore a seconda che estragga una carta rossa o una verde: nello specifico, il primo mazzo assegna 6 punti e 2 punti rispettivamente all'estrazione di una carta rossa e di una verde, il secondo mazzo 5 punti e 5 punti, il terzo mazzo 4 punti e 7 punti, il quarto mazzo 3 punti e 3 punti. Naturalmente vince chi realizza il punteggio più alto.

a) Se io posso scegliere per primo un mazzo e il mio amico invece deve pescare a caso uno dei restanti tre mazzi (ed entrambi dobbiamo ancora giocare), che mazzo mi conviene scegliere?

b) Se entrambi possiamo scegliere il mazzo con cui giocare (e la scelta deve essere fatta prima di giocare), mi conviene essere il primo o il secondo a scegliere?

Risposta: **a) Il terzo; b) Il secondo.**

Svolgimento. **a)** Se scelgo il primo mazzo la probabilità di fare 6 è $\frac{4}{7}$, se scelgo il secondo realizzo certamente 5, se scelgo il terzo la probabilità di fare 7 (dunque di vincere comunque) è $\frac{3}{7}$. Tenuto conto che il mio amico pesca il mazzo a caso,

- se scelgo il primo, vinco se pesco una carta rossa e se il mio amico non pesca una carta verde dal terzo mazzo, dunque con probabilità $\frac{4}{7} \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}\right) = \frac{24}{49}$;
- ragionando in modo analogo, se scelgo il secondo, totalizzo certamente 5 punti e la probabilità di vincere è $1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\right) = \frac{2}{3}$;
- se scelgo il terzo, la probabilità di vincere è $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{7} + 1\right) = \frac{1}{7}\left(3 + \frac{4}{3} \times \frac{10}{7}\right) = \frac{103}{147} > \frac{2}{3}$;
- se scelgo il quarto totalizzo certamente 3 punti e la probabilità di vincere è $\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$.

b) Qualunque sia la scelta del mio amico, scegliendo io un mazzo opportuno fra i rimanenti ho probabilità di vincere maggiore di $\frac{1}{2}$. Infatti: se il mio amico ha scelto il primo, dunque con probabilità $\frac{4}{7}$ di totalizzare 6, io posso scegliere il terzo che mi dà probabilità $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{33}{49}$ di vincere; se il mio amico ha scelto il secondo, totalizzando comunque 5 punti, io posso scegliere il primo che mi dà probabilità $\frac{4}{7}$ di vincere; se il mio amico ha scelto il terzo, dunque con probabilità $\frac{3}{7}$ di totalizzare 7, io posso scegliere il secondo che mi dà probabilità $\frac{4}{7}$ di superarlo; se il mio amico ha scelto il quarto, scegliendo il secondo o il terzo sono certo di vincere.
Il computo delle probabilità può essere fatto anche determinando quante, fra le coppie di carte estraibili, sono favorevoli all'uno o all'altro.

J6. (*22 punti*) Dimostra o confuta la seguente affermazione. "Per ogni intero $n \geq 3$ esistono n numeri interi tutti diversi fra loro tali che ciascuno di essi divida la somma dei restanti $n - 1$."

Risposta: L'affermazione è vera.

Svolgimento. Lo è per $n = 3$ (basta considerare la terna $\{1, 2, 3\}$). Ora si può procedere induttivamente aggiungendo ad ogni n-upla $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ che soddisfi la condizione la somma S di tutti gli elementi della n-upla stessa. Infatti per la $(n+1)$-upla $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, S\}$ accade che, per ipotesi, $S_i = x_1 + x_2 + \ldots x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n$ risulta divisibile per x_i qualunque sia i tra 1 e n, quindi $S_i + S = 2S_i + x_i$ è divisibile per x_i qualunque sia i tra 1 e n e, ovviamente, S divide S.