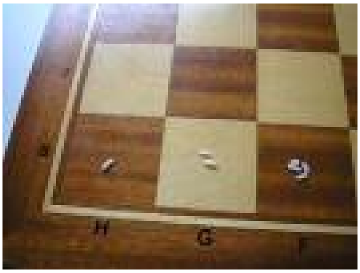
Capitolo 6

Quando i numeri sono troppo grandi, l'intuizione inganna

Il corso dell'evoluzione della specie umana ci ha mal preparati alle scoperte della matematica e della fisica. Esse hanno un'importanza solo marginale per la sopravvivenza e per la riproduzione. Più interessanti a questo riguardo sono le velocità medie, le distanze non troppo piccole né troppo grandi e i numeri relativamente piccoli. Per questo motivo, risulta difficile comprendere la attuale visione scientifica del mondo, secondo la quale alle alte velocità accadono delle cose che ci paiono piuttosto bizzarre. Esiste qualcosa come una naturale incapacità umana ad afferrare certe verità matematiche.

Pensiamo, ad esempio, ai numeri molto grandi. In fisica, c'è almeno la possibilità di rappresentare distanze che vanno oltre la nostra esperienza e intuizione adottando una opportuna scala di misura. Così, ad esempio, si può rappresentare il sistema solare in miniatura attraverso un modello in cui il Sole è rapportato, poniamo, alle dimensioni di un'arancia. In matematica non disponiamo di molte possibilità e, nell'immaginare la possibile evoluzione di certi fenomeni, la nostra mente si smarrisce rapidamente.

Una cosa particolarmente difficile da afferrare è la crescita esponenziale. Molte persone hanno certo sentito la nota storia dei grani di riso. Se inizialmente si pone un granello di riso su un riquadro di una scacchiera e su un altro riquadro se ne pongono due e poi via via si raddoppia il numero di grani sugli altri riquadri, allora il numero di grani sui successivi quadrati è 1, 2, 4, 8, …, 2^{63}. Dopo i sessantaquattro passaggi, il numero di grani è grande a tal punto da superare la produzione mondiale annuale di riso. In realtà, vedere grani di riso su una scacchiera non capita tutti i giorni. Qualcosa di analogo, ma un po' più familiare, è il fenomeno della "catena epistolare". Supponete di ricevere una lettera che ha già avuto anche altri destinatari, e supponete che voi spediate, cosa che vi è stata richiesta appunto nella lettera, una sua copia con il vostro nome e indirizzo a dieci amici che a loro volta faranno la stessa cosa. Ad ogni persona il cui nome sulla lettera sia più vecchio di cinque generazioni viene spedita una cartolina (o 100 Euro, o qualsiasi altra cosa). Questa sembra un'idea grandiosa e, da un punto di vista un po' ingenuo, presenta anche qualche vantaggio (in cartoline o in euro).



Dopotutto, si spedisce una singola cartolina per tenere in vita la catena e dopo un certo tempo si riceve un cesto di corrispondenza. (Un cesto non sarebbe certo sufficiente: se tutti facessero quello che abbiamo detto, dovete immaginare oltre 100 000 cartoline.) Tuttavia questo gioco fallisce pressoché all'inizio per l'inerzia delle persone cui viene richiesto di spedire dieci lettere.

In matematica, la crescita esponenziale incute particolare rispetto. I problemi, il cui grado di difficoltà aumenta notevolmente con la crescita esponenziale dei dati iniziali, sono ritenuti particolarmente impegnativi.

Così, ad esempio, si può provare che il problema di violare una procedura di codifica è di natura esponenziale.

Crescita esponenziale I: un fiume di riso

Quanti grani sono effettivamente implicati nella storia del riso? dobbiamo sommare $1+2+4+\ldots+2^{63}$.
Questo genere di somme si calcola usando la formula della *progressione geometrica*:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{n - 1} \quad \text{per } q \neq 1 \text{ e } n = 1, 2, \ldots$$

Nel nostro caso otteniamo:

$$\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 18 \cdot 1018.$$

Quanto riso!

Non riusciamo ad intuire un tale numero e, invero, anche i 44 milioni di combinazioni differenti del Lotto (Cap.1) ci lasciano un po' disorientati. Cerchiamo ora almeno di prendere confidenza con questa quantità di riso. Un grano di riso in fondo è approssimativamente un cilindretto di 1 mm di diametro e 5 mm di altezza. Così, circa 200 grani di riso occupano un centimetro cubo (= 1 000 millimetri cubi). Ora, continuiamo i nostri calcoli. Se ci sono 200 grani in un centimetro cubo, allora ci saranno $200 \cdot 100^3$ grani in un metro cubo e $200 \cdot 100^3 \cdot 1\,000^3$ in un chilometro cubo. Il numero totale di grani in un chilometro cubo sono dunque $2 \cdot 10^{17}$. Siccome i grani sono circa $184 \cdot 10^{17}$, essi occuperanno circa 92 chilometri cubi.

Per rendere maggiormente accessibile questo numero, facciamo di seguito alcune considerazioni.

L'Italia ha un'estensione di 324.000 chilometri quadrati. La quantità di riso necessaria a soddisfare i requisiti di riempimento della scacchiera può essere pensata come la quantità che causerebbe la scomparsa dell'Italia sotto uno spessore di oltre 28 centimetri di riso. Non ci credete? Neanche io ci credevo, così ho voluto provare di persona e il risultato è rappresentato nelle figure 6.1, 6.2 e 6.3.

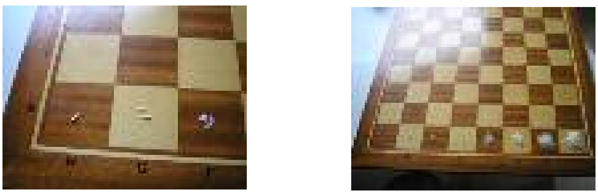


Figura 6.1. Tutto inizia in modo inoffensivo ...

Crescita esponenziale II: piegare un foglio di carta

Prima di leggere le prossime righe, provate a rispondere a questa domanda: quante volte un foglio di carta può essere piegato in due? Molti sbagliano credendo che il numero di volte sia molto grande.

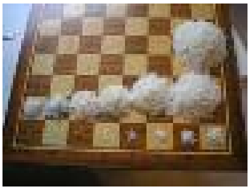


Figura 6.2. ... poi evolve più rapidamente che si possa credere ...

Figura 6.3. ... e poi ho abbandonato.

Quando pieghiamo un foglio, ci sono due aspetti da considerare. Il primo è che lo spessore della carta piegata cresce esponenzialmente, raddoppiando dopo ogni piegatura. Dopo cinque piegature, la carta ripiegata ha lo spessore di 32 pagine poiché $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, corrispondenti a 1 cm circa. Così, se riusciste a piegare per altre 5 volte, otterreste uno spessore di circa 32 cm. Ma ciò è impossibile: una volta ottenuti molti strati l'uno sull'altro e aver raggiunto un certo spessore r, la situazione per lo strato che rimane interno dopo aver piegato è diversa da quella per lo strato esterno. Infatti, lo strato inferiore deve venire teso tanto quanto è necessario per ottenere un semicerchio di raggio r. Il perimetro di un cerchio è $2\pi r$, quindi abbiamo una lunghezza pari a πr. Per esempio, se cinque ripiegamenti danno lo spessore di 1 cm, allora lo strato più esterno, per compensare, deve venire "stirato" di $\pi \approx 3{,}14$ cm. Dopo ancora poche piegature, si raggiunge il limite del possibile stiramento. L'esperienza mostra che il limite è di 8 piegature.
Una stazione radio di Berlino ha voluto sottoporre a verifica questo fatto, così il 12 settembre 2005 fu effettuata pubblicamente una prova con un foglio di carta di 10 *m* x 15 *m*. Anche in quel caso, otto piegature costituirono il limite.

Capitolo 8

Il barbiere del villaggio si rade la barba da solo?

Non sono molti i matematici tedeschi noti oltre i confini della matematica, ma Georg Cantor, fondatore della Teoria degli Insiemi, certamente lo è. Come mai è importante la Teoria degli Insiemi? Come mai si parla di *paradiso della teoria degli insiemi*[1] come una condicio sine qua non per i matematici?
La ragione sta nel fatto che questa branca ha reso possibile un percorso strettamente deduttivo per la matematica.

Figura 8.1. Georg Cantor e Bertrand Russell

Vista superficialmente, la teoria degli insiemi è alquanto disarmante. Semplicemente, vengono raccolti determinati oggetti in un altro oggetto detto *Insieme*. La formazione di siffatti oggetti avviene anche nella vita quotidiana. È chiaro, ad esempio, che certe nazioni costituiscono l'insieme *Unione Europea*, o che taluni dipartimenti costituiscono l'insieme *Governo Federale*. Nasce tuttavia qualche problema quando la creazione di nuovi oggetti avviene in assoluta libertà. Allora possono aversi conseguenze prive di senso, come ha mostrato nel secolo scorso il matematico e filosofo inglese Bertrand Russell. La sua argomentazione poggia su un paradosso logico che è noto fin dall'antichità: se una proposizione fa riferimento a se stessa, essa conduce ad una conclusione contraddittoria.
Una ben nota esemplificazione di un tale paradosso è quella del *barbiere del villaggio*, un uomo specializzato nel radere la barba a quegli uomini che non si radono da soli. Ma, cosa si sa del barbiere? si rade da solo? Non può: infatti egli rade solo coloro che non si radono da soli. Ma se il barbiere non fa la barba a se stesso, allora appartiene al gruppo dei suoi clienti e quindi dovrebbe radere la barba a se stesso. Potete girarla e rigirarla come volete: la questione non ammette una risposta logica.

1. Questa espressione è dovuta al matematico David Hilbert.

Dopo il paradosso di Russell, la *teoria degli insiemi* fu costretta ad una revisione escludendo gli insiemi autoreferenziali, e oggi rappresenta l'indiscusso fondamento della matematica.

La teoria degli insiemi all'asilo

I lettori meno giovani ricorderanno che negli anni sessanta la *teoria degli insiemi* fu molto in auge. Ne fu causa la creazione dello sputnik: nel 1957, l'Unione Sovietica lanciò il primo satellite artificiale della Terra. L'Ovest rispose con sforzi notevoli tesi ad accrescere la cultura in tutte le discipline, dall'asilo all'università. Sfortunatamente, le persone responsabili del sistema educativo si convinsero che per comprendere la matematica fossero necessarie solide basi di conoscenza della Teoria degli Insiemi. Di conseguenza negli asili si formava l' "intersezione tra blocchi verdi e blocchi quadrati". Anche senza il linguaggio della Teoria degli Insiemi, la maggior parte dei bambini avrebbe compreso il significato di blocchi verdi quadrati.
L'insegnamento della Teoria degli Insiemi nella scuola tedesca ha avuto durata breve.
Tuttavia, si ricerca sempre la didattica più adatta a migliorare l'apprendimento della matematica. Attualmente, la maggior parte degli studenti lascia la scuola senza aver realmente compreso tutti gli aspetti della matematica e avendo invece maturato un certo rifiuto per questa disciplina.

Sherlock Holmes è confuso

Per comprendere il paradosso di Russell, bisogna solo conoscere il significato dell'espressione " x è un elemento di M", dove M è un insieme.
Ad esempio le due affermazioni: 14 è un elemento dell'insieme dei numeri pari e 11 è un elemento dell'insieme dei numeri primi sono valide. Al contrario, non è valida l'asserzione: 3/4 è un elemento dell'insieme dei numeri interi.
Russell prese in considerazione l'insieme degli insiemi che non sono elementi di loro stessi. Chiamiamo $\mathcal{M}$ questo insieme. Esso ha qualche strana proprietà.
Si può, ad esempio, porre una domanda elementare: $\mathcal{M}$ è elemento di $\mathcal{M}$?
Naturalmente ci sono due possibili risposte.

- Se la risposta è Sì, cioè se $\mathcal{M}$ è elemento di $\mathcal{M}$, allora questo implica per $\mathcal{M}$ le stesse proprietà che caratterizzano i suoi elementi, che però non sono elementi di loro stessi. Quindi la risposta Sì implica la risposta No.
- Cosa accade se la risposta è No? In questo caso $\mathcal{M}$ non ha la caratteristica degli elementi di $\mathcal{M}$, quindi ha la caratteristica di essere un elemento di se stesso. Allora $\mathcal{M}$, essendo un elemento di se stesso deve essere in $\mathcal{M}$. Ecco che la risposta No implica la risposta Sì.

Ce n'è abbastanza per mandarci in confusione. Questo ragionamento va oltre le potenzialità della logica offerte dalla teoria degli insiemi.
È come se, conducendo le indagini su un crimine, Sherlock Holmes concludesse che il responsabile può essere solo una delle due persone A e B. Ma, se si assume che il responsabile è A, si evince che è stato B a commettere il crimine; e viceversa, se si suppone che il colpevole è B allora il crimine è stato commesso da A. Un nonsenso!
Il paradosso di Russell giunse come una sorta di shock nella comunità dei matematici. Oggi, dopo oltre un secolo, il modo per evitare tali contraddizioni è di escludere l'esame di quegli insiemi che ammettono una definizione autoreferenziale, cioè gli insiemi per definire i quali è necessario conoscere la loro definizione.

Capitolo 10

Può una scimmia creare una grande letteratura?

Iniziamo con un esperimento mentale. La vostra sorellina minore si è seduta davanti al computer e ha iniziato a premere a casaccio i tasti della tastiera. Se lo farà abbastanza a lungo, di tanto in tanto apparirà una parola con un qualche significato. Possiamo forse affermare che la sorellina sa scrivere? La questione tocca un tema filosofico che ha molto interessato negli ultimi tempi la *Teoria della Probabilità*. Quando non c'erano personal computer, l'idea di questo tema veniva resa dall'immagine di una scimmia alla macchina da scrivere. Si può provare che se la scimmia avesse abbastanza tempo, prima o poi produrrebbe tutte le opere letterarie che attualmente esistono in formato cartaceo. Infatti, in una sequenza di esperimenti casuali, tutto ciò che ha una probabilità non nulla di accadere prima o poi accade. Sempre se c'è abbastanza tempo!
Prendiamo ad esempio proprio questo capitolo che state leggendo. Perfino esso potrebbe apparire sullo schermo come prodotto dell'attività della scimmia sulla tastiera. La questione è se questo fatto deve indurci a pensare che la scimmia possiede una certa abilità creativa. Si tratta di un dilemma al quale non è semplice dare una risposta perché la scimmia, dopotutto, il capitolo lo ha scritto; proprio come scriverà "prima o poi" il *Faust* di Goethe e l'articolo di prima pagina del quotidiano odierno.

Figura 10.1. Un poema? Un romanzo? ...

Ci sono due ragioni per credere che la casualità non sostituisce la creatività umana.
La prima è di ordine temporale. Che senso ha la certezza che i grandi capolavori prima o poi appariranno

quando un calcolo approssimato rivela che a tal fine sono necessari tempi enormi?
Anche nutriti eserciti di scimmie, quasi certamente, non produrranno neppure la prima parte del Faust pur digitando per millenni sulle loro tastiere.
Ma la seconda ragione è quella decisiva. Quando qualcosa di significativo compare alla fine, chi ci sarà a dichiarare: “ecco, ci siamo” ? Senza l’introduzione di un’Intelligenza con capacità di discernimento, chi separerà un prodotto che ha significato da una mera sequenza di lettere e parole?
Neppure voi, probabilmente sapete se la sorellina ha scritto uno stupendo poema in Swahili.

Di quanto tempo ha bisogno la scimmia?

Ci piacerebbe stimare quanto tempo dovremmo aspettare perché qualcosa di razionale venisse fuori da tanto impegno della scimmia. Incominciamo da una risultanza della *Teoria della Probabilità*: se un evento casuale ha probabilità p di accadere in una singola prova, allora bisogna prevedere una media di $1/p$ tentativi prima del primo successo. Così, ad esempio, se tiriamo un dado da gioco ci aspettiamo l’uscita di un “1” una volta su 6 tiri e quindi il tempo medio di attesa del nostro “1” è quello corrispondente a 6 tiri.
Supponiamo di attendere l’uscita della parola CASO. Per rendere il nostro calcolo in qualche modo più semplice, supponiamo che la nostra scimmia digiti solo 4 caratteri per volta; dobbiamo dunque controllare se viene stampata la parola CASO. In caso contrario, mettiamo un nuovo foglio di carta nella macchina da scrivere. Se la scimmia batte a caso solo i tasti delle lettere e non facciamo distinzione tra maiuscole e minuscole (“cASo” è considerato valido), allora abbiamo 26 (supponendo l’alfabeto da 26 lettere[1]) possibili uscite per ciascuna digitazione. Quindi quattro digitazioni possono produrre $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26$ possibili “parole”, cioè 456 976 parole. E così la probabilità che venga fuori la parola CASO è $p = 1/456\,976$ e il numero di tentativi atteso è 456 976.
Si tratta naturalmente di un valore medio ma è comunque questo l’ordine di grandezza da mettere in conto. In ciascun particolare caso, il numero effettivo di tentativi potrebbe essere anche molto maggiore o molto minore.
Cosa significa tutto ciò?
Se diamo alla scimmia un nuovo foglio ogni 10 secondi, essa potrà fare 6 tentativi al minuto, cioè 360 l’ora, cioè $8 \cdot 360 = 2\,880$ per le otto ore lavorative in un giorno. Ora dividiamo 456 976 per 2 880 per determinare il numero atteso di giorni che occorrono prima che appaia la parola CASO.
Il risultato è approssimativamente 159 e così, affinché appaia la parola CASO, dovremmo attendere circa sei mesi.
Ora, “caso” non è una parola così sofisticata in letteratura. Quanto tempo dovremmo, invece, aspettare per vedere comparire il motto pitagorico “TUTTO È NUMERO”?
Si tratta di un totale di 12 caratteri più 2 spazi, i quali vanno considerati come caratteri. In definitiva, se consideriamo le 26 lettere dell’alfabeto prima citate, lo spazio e inoltre sei vocali accentate (la vocale “e” può avere l’accento acuto oppure grave), ci sono 33 possibili tasti disponibili per ottenere un’espressione che abbia senso. Ciascun tasto ha probabilità 1/33 di essere premuto. La probabilità che 33 tasti premuti a caso diano come risultato “TUTTO È NUMERO” è

$$1/33^{14} = 1 / 1\,816\,331\,681\,783\,800\,622\,529,$$

che corrisponde a oltre 10^{15} anni se consideriamo giornate lavorative di otto ore e assumiamo che ci sia un tentativo ogni 10 secondi.
Non è dunque così verosimile che la nostra scimmia raggiunga questo risultato

1. a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z