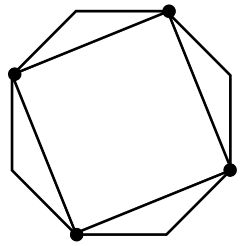
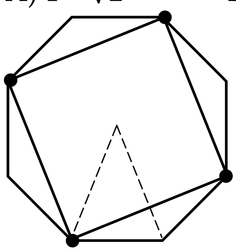
Semifinale individuale Student

Quesiti a risposta chiusa



1. (Punti 2) La figura mostra un ottagono regolare e un quadrato inscritto in esso, i cui vertici sono quattro dei vertici dell'ottagono. L'area del quadrato è 2. Quanto vale l'area dell'ottagono?

A) $1 + \sqrt{2}$ B) 5/2 C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $3\sqrt{2} - 1$



Risposta C). Soluzione. Il lato del quadrato misura $\sqrt{2}$ e la sua diagonale misura 2. L'ottagono è esprimibile come unione degli otto triangoli isosceli che si ottengono congiungendo i vertici con il centro, i cui lati congruenti sono metà della diagonale del quadrato e quindi misurano 1 e la cui altezza rispetto a tali lati è metà del lato del quadrato e quindi vale $\sqrt{2}/2$. L'area di ogni triangolo vale allora $\sqrt{2}/4$.

2. (Punti 3) Un padre suddivide fra i suoi tre figli, di 8, 12 e 18 anni, la somma di 380 euro in parti inversamente proporzionali alle loro età. I tre figli decidono di comune accordo di fare un regalo alla madre e dividerne il costo di 304 euro in parti direttamente proporzionali alle cifre che hanno ricevuto dal padre. Quanti euro restano al figlio più grande?

A) 16 B) 15 C) 12 D) 18 E) 20

Risposta A). Soluzione. Fatta 1 la somma che tocca al figlio di 12 anni, a quello di 8 toccano 3/2 e a quello di 18 toccano 2/3, dunque, in ordine crescente di età, 180, 120 e 80 euro. La ripartizione di 304 euro, ora in parti direttamente proporzionali a questi importi, è quindi nello stesso ordine 144, 96 e 64 euro.

3. (Punti 3) Davanti a me sono allineate 10 scatole numerate delle quali una e una sola contiene un diamante. Da informazioni che ho ricevuto, la scatola n. 10 ha la probabilità 2/5 di contenere il diamante, le rimanenti scatole hanno tutte la stessa probabilità. Ho appena aperto le prime tre scatole e non ho trovato il diamante. A questo punto, qual è la probabilità che il diamante sia nella scatola n. 9?

A) 1/15 B) 3/5 C) 1/10 D) 1/5 E) Nessuna delle precedenti.

Risposta: C) o E). Soluzione. L'enunciato, con la scelta di aprire tre scatole che fanno parte del blocco delle prime nove equiprobabili, consente di escludere la decima scatola dall'effetto delle informazioni ottenute. La probabilità 3/5 che il diamante non sia nella scatola n. 10 è dunque ora concentrata nelle 6 scatole dalla quarta alla nona incluse, ed equi-distribuita fra queste.

E' tuttavia lecito anche ignorare la considerazione precedente e considerare il modello alternativo che prevede una massa di 15/15 spalmata sulle scatole nel modo seguente: 1/15 in ognuna delle scatole dalla prima alla nona e 6/15 nella decima. In questo modo l'apertura delle prime tre scatole riduce a 6/15 la massa presente nel complesso di quelle dalla quarta alla nona. Gli eventi "Il diamante si trova in qualche scatola dalla quarta alla nona" e "Il diamante si trova nella decima scatola" sono dunque equiprobabili, disgiunti ed esaustivi: la risposta è allora $(1/6) \times (1/2) = 1/12$.

4. (Punti 4) Nel piano cartesiano considera un quadrato Q i cui vertici hanno, ciascuno, entrambe le coordinate intere. Per quale dei seguenti motivi non può accadere che l'area di Q sia 27?

A) Perché 27 è un intero dispari. B) Perché 27 non è la somma di due quadrati perfetti.

C) Perché 27 è un cubo perfetto. D) Perché 27 non è un quadrato perfetto.

E) Nessuno dei precedenti è un valido motivo.

Risposta: B). Soluzione. Per il teorema di Pitagora, il quadrato della misura del lato di Q deve essere la somma di due quadrati perfetti. Le altre quattro affermazioni sono facilmente confutabili (per confutare C basta, ad esempio, supporre che due vertici adiacenti di Q siano i punti $(0, 2)$ e $(2, 0)$).

5. (Punti 4) A giorni alterni, Carlo dice la verità o mente per l'intera giornata. Nel giorno del suo quindicesimo compleanno, Carlo ha fatto le tre affermazioni riportate qui di seguito.

1) Ho mentito ieri e mentirò domani.
2) Ieri era lunedì o martedì o mercoledì o giovedì.
3) Domani sarà sabato o domenica o lunedì.

In che giorno è caduto il quindicesimo compleanno di Carlo?

A) Certamente di lunedì. B) Certamente di giovedì. C) Certamente di venerdì.
D) Di giovedì o di venerdì, entrambi essendo possibili.
E) Di lunedì o di venerdì, entrambi essendo possibili.

Risposta: E). Soluzione. 1) può essere sia vera sia falsa. Se 1) è falsa devono essere false anche 2) e 3); se 2) è falsa il giorno può essere sabato, domenica o lunedì, se 3) è falsa il giorno può essere lunedì, martedì, mercoledì o giovedì: l'intersezione è lunedì. Se 1) è vera devono essere vere anche 2) e 3); se 2) è vera il giorno può essere martedì, mercoledì, giovedì o venerdì, se 3) è vera il giorno può essere venerdì, sabato o domenica: l'intersezione è venerdì.

6. (Punti 4) Moltiplicando tra loro tre numeri scelti a caso nell'insieme {38, 55, 68, 104, 175, 375}, quante probabilità si hanno su 100 che il prodotto termini con il massimo numero di zeri possibile?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

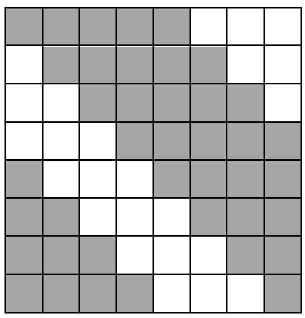
Risposta: E). Soluzione. Le fattorizzazioni dei sei numeri sono, nell'ordine, 2×19, 5×11, $2^2 \times 17$, $2^3 \times 13$, $5^2 \times 7$, $5^3 \times 3$. Il numero di zeri è dato dal più alto esponente al quale nel prodotto può comparire elevato 2×5; questo esponente è chiaramente 3, ottenibile con le seguenti diverse scelte della terna: {104, 375, uno qualunque dei 4 rimanenti}, {38, 68, 375}, {55, 104, 175}, per un totale di 6 terne su 20.

7. (Punti 5) Otto studenti hanno affrontato la stessa prova individuale composta da otto problemi. Ogni problema è stato risolto correttamente da almeno cinque studenti. Qual è il più piccolo valore di n per il quale risulta vero quanto segue: ci sono n studenti tali che ogni problema è stato risolto da almeno uno di essi?

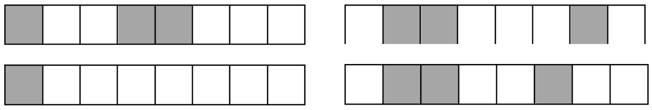
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Risposta: A). Soluzione. Sia N il più grande numero di problemi risolti da un singolo studente. È chiaro che, se $N < 8$, n deve essere almeno 2 e che $n = 2$ è sufficiente se $N = 7$. Se $N = 6$, ognuno dei rimanenti due problemi deve essere stato risolto da 5 studenti, dunque almeno uno di questi 5 deve averli risolti entrambi: ancora $n = 2$ è sufficiente. Se $N = 5$ ogni problema è stato risolto da esattamente 5 studenti (le risposte corrette devono essere almeno 40); consideriamo i tre problemi non risolti da uno studente qualsiasi: complessivamente devono ammettere 15 soluzioni, dunque deve esserci qualcuno dei rimanenti 7 studenti che li ha risolti tutti e tre. È chiaro che non può essere $N < 5$.

In realtà mi pare che, nell'ultimo caso, ci sia una perfetta simmetria che porta ad avere 3 studenti che hanno risolto i problemi non risolti dallo studente preso in esame



8. (Punti 5) Una striscia è formata da 8 quadrati allineati ciascuno dei quali può essere bianco o grigio. Una mossa consiste nel cambiare il colore da bianco a grigio o viceversa di ciascuno di quattro quadrati consecutivi. Se si parte da una striscia in cui i quadrati sono tutti bianchi, quante delle quattro strisce seguenti possono essere ottenute dopo un numero opportuno di mosse, anche variabile da striscia a striscia?



A) 0 (nessuna) B) 1 C) 2
D) 3 E) 4 (tutte)

Risposta A). Soluzione. Denotiamo i quadrati con lettere da A a H. Dopo aver effettuato un dato numero di mosse, siano a i cambi di colore subiti dal quadrato A, $a + b$ i cambi di colore subiti dal quadrato B, $a + b + c$ i cambi subiti dal quadrato C, $a + b + c + d$ i cambi subiti dal quadrato D, $b + c + d + e$ i cambi subiti dal quadrato E. Allora i cambi subiti dal quadrato F sono $c + d + e$, quelli subiti dal quadrato G sono $d + e$, quelli subiti dal quadrato H sono e. Risulta allora che il numero di cambi $a + e$ subiti complessivamente da A e H risulta avere la stessa parità di quello, $a + e + 2(b + c + d)$, dei cambi subiti complessivamente da D e E: ciò permette di escludere la prima e la terza delle strisce proposte. Comparando con lo stesso criterio le coppie di quadrati $\{B, F\}$ e $\{C, G\}$ si escludono anche le rimanenti due strisce.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
a	$a + b$	$a + b + c$	$a+b+c+d$	$b+c+d+e$	$c + d + e$	$d + e$	e

9. (Punti 6) Una strada rettilinea lunga 1.000 metri viene controllata mediante n telecamere ognuna delle quali copre esattamente un tratto lungo 10 metri alla sua sinistra e 10 metri alla sua destra, estremi inclusi, ma non copre alcun punto fuori dalla strada. Le telecamere sono più del necessario ma sono disposte in modo tale che, se anche una sola di esse non funzionasse, rimarrebbe scoperto qualche tratto di strada. Qual è il massimo valore possibile per n?

A) 49 B) 50 C) 51 D) 74 E) 98

Risposta: E). Soluzione. Numeriamo le telecamere in modo progressivo lungo la strada partendo da 1. Se il tratto coperto dalla k-esima intersecasse quello coperto dalla (k+2)-esima, la (k+1)-esima sarebbe inutile: allora i tratti coperti da telecamere con numeri dispari sono disgiunti, dunque non possono essere più di 49. Deve essere $n < 99$ poiché, in caso contrario, ci sarebbero almeno 50 "tratti dispari". Può essere $n = 98$. È sufficiente distribuire le 98 telecamere in modo che siano uniformemente distanziate con la prima e l'ultima a 10 metri dall'estremo di strada corrispondente: la distanza tra la k-esima e la (k+2)-esima telecamera è allora di $2 \times 980 / 97$ metri che, essendo superiore a 20 metri, non può che essere coperta dalla (k+1)-esima telecamera (analogo ragionamento agli estremi).

Quesiti a risposta aperta

10. (Punti 4) Quattro numeri reali a, b, c, d tutti diversi da 0 sono tali che la loro somma è 0, come pure la somma dei loro inversi con l'inverso del loro prodotto. Quanto vale $(cd - ab)(c + d)$?

Risposta: 0001. Soluzione. Dalla seconda condizione si ottiene $cd(a + b) + ab(c + d) = - 1$. Dalla prima, essendo $a + b = -(c + d)$, si ottiene allora che il numero cercato è 1.

11. (Punti 5) Voglio esprimere il maggior numero possibile di interi utilizzando solo la cifra 4 ed esattamente quattro volte. Posso accostare più volte la cifra 4, utilizzare le quattro operazioni aritmetiche e disporre parentesi nei modi che ritengo opportuni. Ad esempio posso scrivere 0 = 4 –

$4 + 4 – 4$, oppure $15 = 44/4 + 4$, oppure $160 = (44 – 4) \times 4$. Quanti dei numeri interi tra 0 e 10 compresi posso esprimere con questa procedura?
Risposta: 0011. Soluzione. $0 = 4 – 4 + 4 – 4$; $1 = 44/44$; $2 = 4/4 + 4/4$; $3 = (4 + 4 + 4)/4$; $4 = 4 – (4 – 4)/4$; $5 = (4 \times 4 + 4)/4$; $6 = (4 + 4)/4 + 4$; $7 = 44/4 – 4$; $8 = 4 + 4 + 4 – 4$; $9 = 4 + 4 + 4/4$; $10 = (44 – 4)/4$.

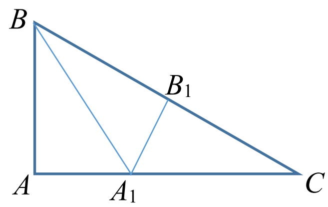
12. (Punti 5) Quanti angoli che misurino meno di 170 gradi può avere al massimo un poligono convesso?
Risposta: 0035. Soluzione. La somma dei complementi a 180 delle misure in gradi degli angoli di un poligono convesso deve essere 360. D'altra parte, avvalendosi di questa considerazione, è chiaro che esiste un poligono di 36 lati con 35 angoli che misurino meno di 170 gradi.

13. (Punti 6) Assegnato un poligono convesso di n lati ($n > 3$), indichiamo con S_n il numero delle sue diagonali. Qual è il più piccolo valore di n tale che $S_n + S_{n-1} > 2024$?
Risposta: 0048. Soluzione. Per ogni $n > 3$ si ha $S_n = n(n – 3)/2$, da cui $S_n + S_{n-1} = n^2 – 4n + 2$. Affinché si abbia $n^2 – 4n – 2022 > 0$ deve essere $n > 2 + \sqrt{2026}$. Il primo quadrato perfetto maggiore di 2026 è $2116 = 46^2$.

14. (Punti 6) A una gara matematica sono stati proposti n problemi a 50 concorrenti. Per ogni singolo concorrente, sono state contate le risposte corrette fornite, quelle sbagliate e quelle non date. Non vi sono stati due concorrenti che abbiano fornito sia lo stesso numero di risposte corrette, sia lo stesso numero di risposte sbagliate. Qual è il più piccolo valore possibile per n?
Risposta: 0009. Soluzione. Nelle nostre ipotesi, per $0 \le k \le n$, gli elaborati ammissibili con esattamente k risposte corrette sono in numero di $n – k + 1$ (potrebbero non esserci risposte non date). La somma di tutti questi numeri al variare di k è la somma degli interi da 1 a $n + 1$ inclusi, cioè $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ e questo valore deve essere almeno 50. Da $n^2 + 3n – 98 \ge 0$, con n intero, segue $n \ge 9$.

15. (Punti 6) È dato un triangolo ABC, rettangolo in A e il cui angolo in B misura 60 gradi; tale triangolo ha area 2024. Con la procedura che segue vengono individuate due sequenze di punti: $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sul lato AC e $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sul lato BC:
- A_1 è sulla bisettrice dell'angolo ABC, il segmento A_1B_1 è perpendicolare al lato BC;
- B_2 è sulla bisettrice dell'angolo B_1A_1C, il segmento B_2A_2 è perpendicolare al lato AC;
- A_3 è sulla bisettrice dell'angolo A_2B_2C, il segmento A_3B_3 è perpendicolare al lato BC

e così via. Qual è il più piccolo intero n tale che l'area del triangolo A_nB_nC sia minore di 10?
Risposta: 0005. Soluzione. I triangoli ABA_1, A_1BB_1 e A_1B_1C sono congruenti: quindi l'area di A_1B_1C è 1/3 di quella di ABC. Dato che tutti i triangoli A_hB_hC sono simili ad ABC, la situazione si ripropone per ogni triangolo A_hB_hC rispetto ad $A_{h-1}B_{h-1}C$ e per $n = 5$ l'area $2024/3^5 = 2024/243$ di A_nB_nC diventa per la prima volta minore di 10.



16. (Punti 7) Quanti sono i numeri interi positivi di due cifre che, divisi per la somma delle loro cifre, danno come quoziente 7 (ed eventualmente un resto)?
Risposta: 0011. Soluzione. Detti $10A + B$ i numeri in questione, deve essere $(10A + B) / (A + B) = 7 + r / (A + B)$ con $0 \le r < A + B \le 18$. Chiaramente ciò esclude che sia $B = 0$. Da $10A + B = 7A + 7B + r$ segue subito che $r = 3(A – 2B)$ deve essere divisibile per 3: le possibilità (per ora teoriche) per r sono dunque 0, 3, 6, 9, 12, 15. Passiamole in rassegna, ricordando che deve essere $r < A + B = 3B + r/3$ cioè $2r < 9B$:
$r = 0$ comporta $A = 2B$, dunque porta agli interi 84, 63, 42, 21;

$r = 3$ comporta $A = 1 + 2B$, dunque porta agli interi 94, 73, 52, 31;
$r = 6$ comporta $A = 2 + 2B$, dunque porta agli interi 83, 62
$r = 9$ comporta $A = 3 + 2B$, dunque porta all'intero 93
$r = 12$ e $r = 15$ non lasciano possibilità.

17. (Punti 7) Sommando i cubi di alcuni numeri interi consecutivi si ottiene come risultato 2024. Quanti possono essere al massimo questi interi?

Risposta: 0011. Soluzione. Un noto teorema afferma che, per ogni intero positivo n, la somma dei cubi dei primi n interi positivi coincide con il quadrato della somma di questi primi n interi. La somma dei primi n interi positivi vale $n(n + 1)/2$: velocemente si trova allora che $45^2 = 2025$ è la somma dei cubi degli interi da 1 a 9. Dunque 2024 è la somma dei cubi degli interi da 2 a 9, ma anche dei cubi degli interi da -1 a 9. È facile appurare che questa sequenza di interi consecutivi non può essere estesa.

18. (Punti 8) In una scatola vi sono 1.016 biglie rosse e 1.008 biglie verdi. Calcola la probabilità p che, estraendo a caso una biglia alla volta, dopo ogni estrazione il numero delle biglie rosse rimaste nella scatola rimanga sempre diverso dal numero delle biglie verdi rimaste nella scatola? Scrivi il numero $1/p$ o, se non fosse intero, il numero intero ad esso più vicino.

Risposta: 0253. Soluzione. Calcoliamo la probabilità dell'evento complementare C, cioè che, dopo qualche estrazione, le biglie verdi rimaste nella scatola siano tante quante le rosse. Immaginiamo di compiere l'operazione inversa, cioè di riempire la scatola attingendo alle biglie da fuori, cosa che è equivalente ai nostri fini. Se la prima biglia inserita è verde, il che accade con probabilità 1.008/2.024, certamente C si verifica. Supponiamo ora che la prima biglia inserita sia rossa e che ancora C si verifichi. Consideriamo la prima volta in cui C si verifica: l'ultimo inserimento deve essere stato di una biglia verde. Poiché abbiamo solo biglie rosse o verdi, la probabilità a priori che quell'inserimento sia stato di una biglia verde è ancora 1.008/2.024. Dunque si ha $p = 1 - 2 \times 1.008/2.024 = 8/2.024 = 1/253$.