Kangourou della Matematica 2024
finale nazionale italiana
Cesenatico, 21 settembre 2024

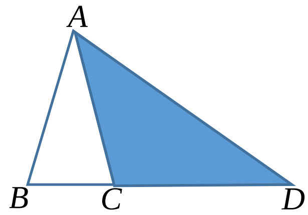
LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) Sono dati due triangoli. Le lunghezze di due dei lati dell'uno coincidono con le lunghezze di due dei lati dell'altro e l'altezza relativa al terzo lato di uno coincide con quella relativa al terzo lato dell'altro. I due triangoli risultano necessariamente congruenti?

Risposta: no.

Svolgimento. La congruenza si avrebbe necessariamente se i triangoli fossero entrambi acutangoli (facile da provare: l'altezza relativa al terzo lato cadrebbe comunque all'interno del triangolo), ma non in generale. Si considerino per esempio i due triangoli *ABD* e *ACD* in figura, dove i segmenti *AB* e *AC* hanno la stessa lunghezza e *D* è allineato con *BC*: chiaramente non sono congruenti, e l'altezza relativa a *BD* per *ABD* coincide con quella relativa a *CD* per *ACD*.



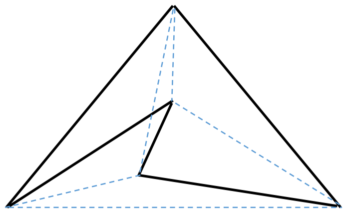
S2. (*7 punti*) Io non bevo caffè nei soli giorni di lunedì e sabato. Un aereo viene impiegato a giorni alterni sulle rotte Milano – Cagliari e Milano – Palermo con voli di andata e ritorno giornalieri operati settimanalmente dal martedì alla domenica inclusi; ogni lunedì è fermo per manutenzione. Nel corso di un anno ci sono stati due mesi consecutivi nell'arco dei quali ha operato complessivamente per 53 giorni, il primo dei quali su Cagliari. Nel primo giorno del primo di questi due mesi non ho bevuto caffè. È possibile stabilire su quale città l'aereo ha operato nel primo giorno di operatività del secondo mese? È possibile stabilire se tale giorno coincide con il primo giorno del mese?

Risposta: sì, su Cagliari; sì nel primo giorno del mese.

Svolgimento. 53 giorni di operatività significa in ogni caso 62 giorni complessivi (cioè due mesi di 31 giorni). Infatti in due mesi non ci sono mai meno di 8 lunedì, quindi se i giorni di operatività devono essere 53, i giorni complessivi sono almeno 61. Ma esattamente 61 con 8 lunedì significherebbe che il primo giorno del bimestre è martedì o mercoledì (e l'ultimo del secondo mese rispettivamente sabato o domenica) mentre, se nel primo giorno non ho bevuto caffè, tale giorno doveva essere *lunedì* o *sabato*. In entrambi i casi i giorni di rotta su Cagliari sono martedì, giovedì e sabato. Il primo giorno del secondo mese è, nel primo caso, giovedì, nel secondo, martedì, entrambi giorni operativi e di rotta su Cagliari.

S3. (*11 punti*) Per un poligono (piano) P, non necessariamente convesso, indichiamo con $N(P)$ il numero di punti che sono intersezioni di diagonali e non sono vertici. Se P è un quadrilatero, $N(P)$ può essere solo 1 oppure 0. Se P è un pentagono, il massimo valore possibile per $N(P)$ è 5 (ad esempio se P è regolare); qual è invece il minimo valore possibile? (In un qualunque poligono, per *diagonale* si intende un segmento che congiunge due vertici non adiacenti.)

Risposta: 0.
Svolgimento. La figura suggerisce una delle configurazioni possibili.



S4. (*14 punti*) Esistono numeri interi palindromi di 4 cifre (cioè del tipo $ABBA$ con $A \neq 0$) in notazione decimale, che siano quadrati perfetti?

Risposta: No.
Svolgimento. Per assurdo, sia $ABBA = n^2$ per qualche n intero positivo. Osservando che $ABBA = 1.000A + 100B + 10B + A = 11(91A + 10B)$, oppure ricorrendo direttamente al criterio di divisibilità per 11, si vede che $ABBA$ deve essere multiplo di 11. Allora anche n deve essere multiplo di 11, cioè $n = 11k$ con k intero positivo, quindi $ABBA = n^2 = 121k^2$. Affinché $(11k)^2$ abbia 4 cifre, deve essere $3 \leq k \leq 9$: nessuno di questi sette numeri è palindromo.

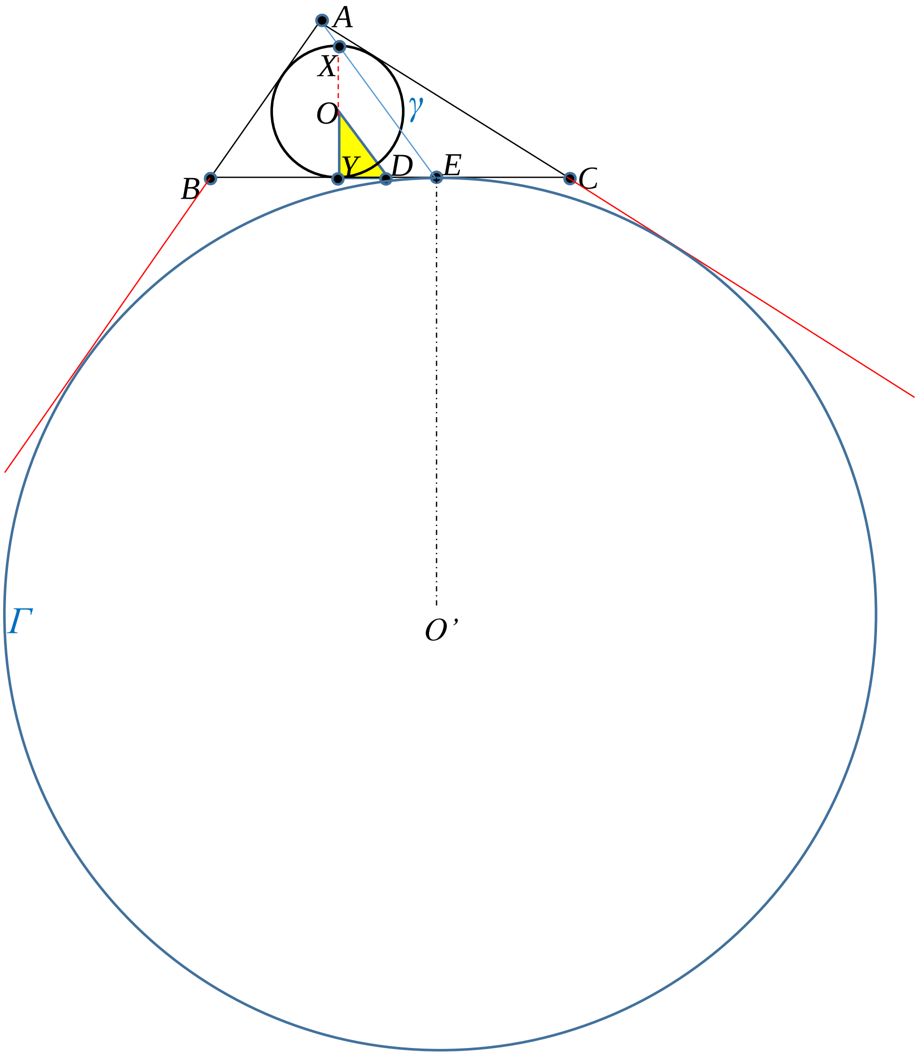
S5. (*18 punti*) Sia ABC un triangolo e sia O il centro della sua circonferenza inscritta γ. Il simbolo $|FG|$ denoti la lunghezza del segmento di estremi F e G. Siano

- D il punto medio del lato BC,
- Y il punto di contatto tra γ e il lato BC,
- E il punto del lato BC tale che $|AB| + |BE| = |AC| + |CE|$,
- X il punto di intersezione del segmento AE con γ più vicino a A.

Se il raggio di γ è 4 e $|YD| = 3$, quanto vale $|XE|$?

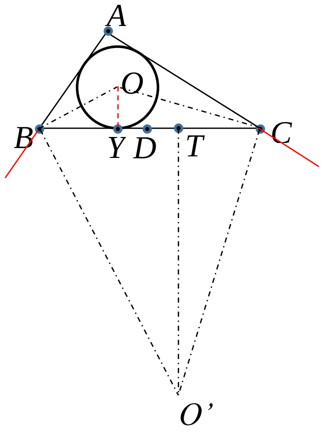
Risposta: 10.

Svolgimento. È sufficiente dimostrare che D è il punto medio anche di YE e che il triangolo XYE è rettangolo (in Y), e applicare il teorema di Pitagora.



La prima affermazione è una banale conseguenza delle ipotesi, poiché $|BY| = |EC|$, in quanto coincidono con il semiperimetro di ABC meno $|AC|$.

Per dimostrare la seconda basta provare che la retta tangente a γ in X è parallela al lato BC. Si consideri la circonferenza Γ tangente a BC e al prolungamento oltre B del lato AB e a quello oltre C del lato AC: esiste ed è unica ed è facile provare che è tangente a BC nel punto E (*). Γ è a sua volta la circonferenza inscritta in un triangolo $AB'C'$ che contiene ABC ed è ad esso simile (per dilatazione da A): nella similitudine tra $AB'C'$ e ABC, γ si trasforma in Γ, il punto X intersezione di γ con la retta AE si trasforma nel punto E in cui Γ è tangente a BC e la tangente in X a γ dovendo trasformarsi nella retta BC è ad essa parallela.



(*) Siano infatti T il punto di tangenza e O' il centro della circonferenza Γ. I triangoli OBY e $BO'T$ della figura a fianco sono simili, quindi $OY{:}BY = BT{:}O'T$; analogamente i triangoli OYC e CTO' sono simili, quindi $OY{:}CY = CT{:}O'T$. Ne segue che $BY \times BT = CY \times CT$. Dato che $BT = BC - CT$ e $CY = BC - BY$, risulta $BY \times BC = CT \times BC$ cioè $BY = CT$; dunque T, come E, è il simmetrico di Y rispetto a D.

S6. (*22 punti*) Nel calendario di Kanglandia non esistono giorni festivi stabiliti a priori ma, in base ad un accordo sindacale, una ditta è costretta a dichiarare "giorno festivo per tutti" ogni giorno che sia di compleanno per almeno un dipendente. All'atto dell'assunzione di un dipendente non viene tenuta in alcun conto la sua data di nascita. Supponi che gli anni siano tutti di 365 giorni e che le nascite a Kanglandia siano uniformemente distribuite nell'arco dell'anno. Una ditta vuole puntare a massimizzare il numero di giornate lavorative complessive dei suoi dipendenti nell'arco di un anno, ma deve stabilire in anticipo il numero dei dipendenti da assumere. Quanti dipendenti le conviene assumere? (Nota: le giornate lavorative complessive annuali con 1 dipendente sarebbero 364, con 2 sarebbero 2 × 363 se i compleanni cadessero in giorni diversi, 2 × 364 se cadessero nello stesso giorno.)

Risposta: 364 o 365. Svolgimento. Il numero a cui puntare esiste poiché è chiaro che, al crescere all'infinito del numero dei dipendenti, la probabilità che in ogni giorno dell'anno ne sia nato qualcuno tende a 1.

Per semplicità di scrittura poniamo $M = 1 - \frac{1}{365}$. Con k dipendenti, la probabilità che un qualsiasi giorno fissato dell'anno sia lavorativo è M^k: allora il numero medio di giornate lavorative complessive per quel giorno è $k \times M^k$ e, poiché i giorni sono tutti equivalenti, il numero più probabile di giornate lavorative complessive annuali è $365 \times k \times M^k$. Occorre determinare k (intero) in modo da massimizzare questa quantità. Si deve avere

$$365 \times (k-1) \times M^{k-1} \leq 365 \times k \times M^k \geq 365 \times (k+1) \times M^{k+1}.$$

La prima disuguaglianza fornisce $k \leq 365$, la seconda $k \geq 364$. Entrambi i valori portano a determinare $365^2 \times M^{365}$ come numero più probabile di giornate lavorative complessive annuali, dunque è indifferente (a priori) assumere 364 o 365 dipendenti. (Approssimando M^{365} con $1/e$ (e numero di Nepero), si prevede una media di circa 49.011 giornate lavorative complessive annuali.)