



Kangourou della Matematica 2024
Coppa Junior a squadre
Finale 2
Cervia, 6 maggio 2024



Quesiti

1. Divisibile per 60

Qual è il più piccolo numero naturale di tre cifre ABC , tutte distinte fra loro e diverse da zero, tale che la media di tutti i numeri che si ottengono permutando le tre cifre (ABC incluso) sia un intero divisibile per 60?

2. La rete

Un appezzamento di terreno quadrato di lato 1 km viene ripartito in porzioni rettangolari ciascuna delle quali può essere di dimensioni $5\text{ m} \times 20\text{ m}$ oppure $6\text{ m} \times 12\text{ m}$. Le singole porzioni vengono separate con una rete e l'appezzamento globale viene recintato, sempre con una rete: tenendo conto di tutte le possibili ripartizioni, qual è la somma tra la massima e la minima lunghezza in chilometri della rete complessivamente richiesta?

3. I sottoinsiemi

Considerate l'insieme $\{1, 2, \dots, 9, 10, 11\}$ dei primi 11 interi positivi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi di almeno due elementi che non contengono due numeri consecutivi?

4. L'equazione

Considerate l'equazione (nell'incognita x), dipendente dai due parametri a e b ,

$$x^3 - 10x^2 + ax - b = 0.$$

Esistono coppie ordinate (a, b) di interi strettamente positivi tali che l'equazione abbia tre soluzioni (reali) le quali siano tutte numeri interi strettamente positivi. Quanto vale la somma dei primi elementi di tali coppie? (*Se ritenete che esistano infinite coppie, scrivete 9999*).

5. La griglia

Un concorrente ha a disposizione una griglia quadrata 10×10 . Guadagna due punti per ogni sotto-griglia quadrata (griglia originale inclusa) che riesce a identificare e un punto per ogni sotto-griglia rettangolare non quadrata che riesce a identificare. Qual è il massimo punteggio che può totalizzare?

6. Il valore in 0

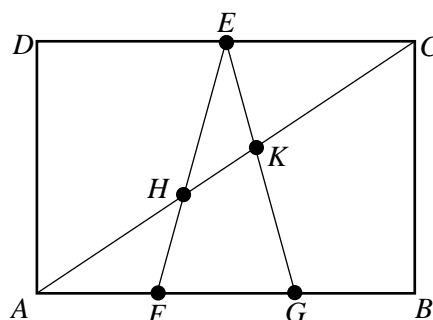
Considerate la funzione f definita sull'insieme dei numeri interi non negativi, a valori nell'insieme dei numeri interi, nel modo seguente: per n intero non negativo si ponga

$$f(n) = n - 10 \text{ se } n > 100, \quad f(n) = f(f(n + 11)) \text{ se } 0 \leq n \leq 100.$$

Quanto vale $f(0)$?

7. Il rettangolo

Nella figura a destra, $ABCD$ è un rettangolo, E è il punto medio di DC e AF , FG , GB sono ciascuno lunghi $1/3$ di AB . L'area del triangolo EHK è 27. Quanto vale l'area del rettangolo $ABCD$?



8. Quadrato perfetto

Scrivete le prime quattro cifre (da sinistra) del più grande numero naturale n tale che $n^2 + 2024n$ sia un quadrato perfetto.

9. Il resto

Il numero intero positivo N è costituito da 1.001 cifre tutte uguali a 1. Qual è il resto della divisione di N per 1.001?

10. Il cubetto

Ada accosta 64 cubetti di lato 1 in modo da formare un cubo $4 \times 4 \times 4$ e vernicia di rosso le sei facce esterne del cubo ottenuto. Separa poi i 64 cubetti, ne prende uno a caso e lo lancia sul pavimento come lancerebbe un dado: qual è la probabilità che, tra le facce visibili del cubetto dopo il lancio, ve ne sia esattamente una dipinta di rosso? (Scrivete uno dopo l'altro numeratore e denominatore della frazione: ad esempio se la risposta fosse $21/23$ o $2/123$ scrivete in entrambi i casi 2123, se fosse $1/3$ scrivete 0103.)

11. Ripartizione

Voglio ripartire l'insieme dei primi 100 interi positivi in due sottoinsiemi disgiunti in modo che le due somme degli interi presenti nei due sottoinsiemi coincidano e che uno dei due abbia il minor numero possibile di elementi. Qual è questo numero?

12. La percentuale

Le misure dei lati di un triangolo T sono 3, 4 e 5. L'altezza e la mediana di questo triangolo relative al vertice dell'angolo maggiore sono lati di uno stesso triangolo S . Quale percentuale dell'area di T è l'area di S ?

13. Il vertice

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (monometrico) fissato per lo spazio, i tre punti $(4, 0, 3)$, $(6, 4, 1)$ e $(2, 8, 5)$ rappresentano tre dei vertici di un cubo. Uno solo dei rimanenti 5 vertici ha come prima coordinata 0: quali sono, nell'ordine, le sue coordinate? (Le coordinate richieste sono tutte interi non negativi inferiori a 10, dunque la risposta dovrà essere della forma $[00AB]$.)

14. Le carte

Ci sono 2024 carte, ognuna con una faccia bianca e l'altra grigia, numerate da 1 a 2024 con lo stesso numero sulle due facce. Inizialmente tutte mostrano la faccia bianca. Si eseguono 2024 mosse: per $1 \leq k \leq 2024$, la k -esima mossa consiste nel rovesciare tutte e sole le carte che riportano un numero divisibile per k (dunque alla prima mossa si rovesciano tutte le carte, alla seconda solo le carte che riportano un numero pari, e così via). Dopo 2024 mosse, quante carte mostrano la faccia bianca?

15. L'oggetto rimasto

Ci sono 2024 oggetti allineati e numerati da 1 a 2024. In un primo momento vengono eliminati tutti gli oggetti che riportano un numero dispari: a questo punto gli oggetti restanti vengono nuovamente numerati da 1 a 1012 e vengono eliminati tutti gli oggetti che ora riportano un numero dispari. Si procede in questo modo con una nuova numerazione e una nuova eliminazione, e così via fino a quando non rimane che un solo oggetto. Che numero aveva inizialmente questo oggetto?



Kangourou della Matematica 2024
Coppa Junior a squadre
Finale 2
Cervia, 6 maggio 2024



Titoli e risposte

- 1. Divisibile per 60 [0127]**
- 2. La rete [0504]**
- 3. I sottoinsiemi [0221]**
- 4. L'equazione [0220]**
- 5. La griglia [3410]**
- 6. Il valore in 0 [0091]**
- 7. Il rettangolo [0630]**
- 8. Quadrato perfetto [2550]**
- 9. Il resto [0100]**
- 10. Il cubetto [0716]**
- 11. Ripartizione [0030]**
- 12. La percentuale [0014]**
- 13. Il vertice [0047]**
- 14. Le carte [1980]**
- 15. L'oggetto rimasto [1024]**