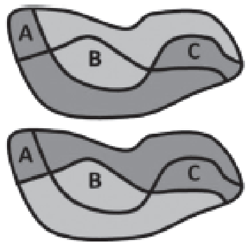
Semifinale individuale Junior

Quesiti a risposta chiusa

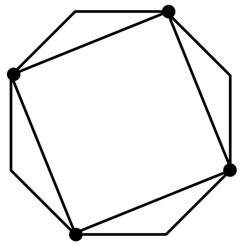
1. (Punti 2) Le due immagini mostrano lo stesso parco ripartito in 5 zone; le lettere presenti in tre delle zone ne indicano l'area. Nel parco abitano due canguri: uno è solito pascolare nella parte più chiara della prima immagine, l'altro in quella più chiara della seconda. Le due parti si sovrappongono parzialmente. In questo modo, entrambi i canguri hanno a disposizione esattamente metà dell'area del parco. Quale delle seguenti uguaglianze è certamente vera?



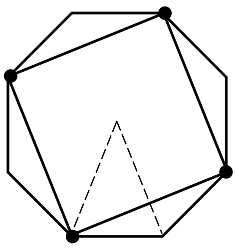
A) $A = C$ B) $B = A + C$ C) $B = (A + C)/2$ D) $B = 2(A + C)/3$ E) $B = 3(A + C)/5$

Risposta B). Sol. Dette D e E le aree delle zone per le quali non sono indicate lettere, deve essere $B + D = A + E + C = B + E$ (ogni canguro ha a disposizione metà del parco). Dalla seconda uguaglianza segue che è comunque vera B). È banale trovare esempi nei quali A) è falsa.

2. (Punti 3) La figura mostra un ottagono regolare e un quadrato inscritto in esso, i cui vertici sono quattro dei vertici dell'ottagono. L'area del quadrato è 2. Quanto vale l'area dell'ottagono?



A) $1 + \sqrt{2}$ B) 5/2 C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $3\sqrt{2} - 1$



Risposta C). Soluzione. Il lato del quadrato misura $\sqrt{2}$ e la sua diagonale misura 2. L'ottagono è esprimibile come unione degli otto triangoli isosceli che si ottengono congiungendo i vertici con il centro, i cui lati congruenti sono metà della diagonale del quadrato e quindi misurano 1 e la cui altezza rispetto a tali lati è metà del lato del quadrato e quindi vale $\sqrt{2}/2$. L'area di ogni triangolo vale allora $\sqrt{2}/4$.

3. (Punti 3) La rappresentazione decimale del numero intero N ha la forma 20230…0, dove le cifre non indicate sono tutte 0. Si sa che lo 0,0002024 % di N è maggiore di 2025. Quante cifre deve avere N al minimo?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

Risposta: D). Soluzione. L'intero positivo k deve essere tale che $2023 \times 10^k \times 2024 / 10^{7+2} > 2025$: si deve dunque avere $k \geq 6$.

4. (Punti 4) Ad una festa presso l'ambasciata italiana sono stati invitati alcuni spagnoli e alcuni francesi, più di uno per ciascuna nazionalità e anche gli italiani presenti sono più di uno. Ogni italiano dà il benvenuto una e una sola volta a ogni invitato straniero con una stretta di mano e non vi sono altre strette di mano: alla fine, le strette di mano sono complessivamente 143. Quanti potrebbero essere, al massimo, gli spagnoli invitati?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Risposta: E). Soluzione. Il numero di strette di mano è il prodotto del numero degli italiani con la somma del numero degli spagnoli e del numero dei francesi. Volendo esprimere 143 come prodotto di interi ci sono solo due possibilità: 1×143 e 11×13. La prima è da escludere per ipotesi. Allora gli stranieri potrebbero essere al massimo 13 e quindi gli spagnoli al massimo $13 - 2 = 11$.

5. (Punti 4) Un padre suddivide fra i suoi tre figli, di 8, 12 e 18 anni, la somma di 380 euro in parti inversamente proporzionali alle loro età. I tre figli decidono di comune accordo di fare un regalo alla madre e dividerne il costo di 304 euro in parti direttamente proporzionali alle cifre che hanno ricevuto dal padre. Quanti euro restano al figlio più grande?

A) 16 B) 15 C) 12 D) 18 E) 20

Risposta A). Soluzione. Fatta 1 la somma che tocca al figlio di 12 anni, a quello di 8 toccano 3/2 e a quello di 18 toccano 2/3, dunque, in ordine crescente di età, 180, 120 e 80 euro. La ripartizione di 304 euro, ora in parti direttamente proporzionali a questi importi, è quindi nello stesso ordine 144, 96 e 64 euro.

6. (Punti 4) Davanti a me sono allineate 10 scatole numerate delle quali una e una sola contiene un diamante. Da informazioni che ho ricevuto, la scatola n. 10 ha la probabilità 2/5 di contenere il diamante, le rimanenti scatole hanno tutte la stessa probabilità. Ho appena aperto le prime tre scatole e non ho trovato il diamante. A questo punto, qual è la probabilità che il diamante sia nella scatola n. 9?

A) 1/15 B) 3/5 C) 1/10 D) 1/5 E) Nessuna delle precedenti.

Risposta: C) o E). Soluzione. L'enunciato, con la scelta di aprire tre scatole che fanno parte del blocco delle prime nove equiprobabili, consente di escludere la decima scatola dall'effetto delle informazioni ottenute. La probabilità 3/5 che il diamante non sia nella scatola n. 10 è dunque ora concentrata nelle 6 scatole dalla quarta alla nona incluse, ed equi-distribuita fra queste.

E' tuttavia lecito anche ignorare la considerazione precedente e considerare il modello alternativo che prevede una massa di 15/15 spalmata sulle scatole nel modo seguente: 1/15 in ognuna delle scatole dalla prima alla nona e 6/15 nella decima. In questo modo l'apertura delle prime tre scatole riduce a 6/15 la massa presente nel complesso di quelle dalla quarta alla nona. Gli eventi "Il diamante si trova in qualche scatola dalla quarta alla nona" e "Il diamante si trova nella decima scatola" sono dunque equiprobabili, disgiunti ed esaustivi: la risposta è allora $(1/6) \times (1/2) = 1/12$.

7. (Punti 5) Qual è la cifra delle unità del numero $2023^{2024} - 2023^{2023}$?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Risposta: C). Soluzione. Il numero in questione coincide con 2022×2023^{2023}. Le cifre delle unità delle potenze intere positive di 3, a partire dalla prima, si susseguono con periodo 3, 9, 7, 1 di lunghezza quattro: la stessa cosa accade evidentemente anche per le potenze intere positive di qualunque numero la cui cifra delle unità sia 3. Si ha $2023 = 505 \times 4 + 3$: allora quella di 2023^{2023} è 7.

8. (Punti 5) Nel piano cartesiano considera un quadrato Q i cui vertici hanno, ciascuno, entrambe le coordinate intere. Per quale dei seguenti motivi non può accadere che l'area di Q sia 27?

A) Perché 27 è un intero dispari. B) Perché 27 non è la somma di due quadrati perfetti.

C) Perché 27 è un cubo perfetto. D) Perché 27 non è un quadrato perfetto.

E) Nessuno dei precedenti è un valido motivo.

Risposta: B). Soluzione. Per il teorema di Pitagora, il quadrato della misura del lato di Q deve essere la somma di due quadrati perfetti. Le altre quattro affermazioni sono facilmente confutabili (per confutare C basta, ad esempio, supporre che due vertici adiacenti di Q siano i punti (0, 2) e (2, 0)).

9. (Punti 6) A giorni alterni, Carlo dice la verità o mente per l'intera giornata. Nel giorno del suo quindicesimo compleanno, Carlo ha fatto le tre affermazioni riportate qui di seguito:

1) Ho mentito ieri e mentirò domani.
2) Ieri era lunedì o martedì o mercoledì o giovedì.
3) Domani sarà sabato o domenica o lunedì.

In che giorno è caduto il quindicesimo compleanno di Carlo?

A) Certamente di lunedì. B) Certamente di giovedì. C) Certamente di venerdì.

D) Di giovedì o di venerdì, entrambi essendo possibili.

E) Di lunedì o di venerdì, entrambi essendo possibili.

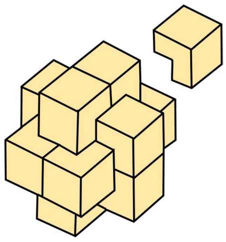
Risposta: E). Soluzione. 1) può essere sia vera sia falsa. Se 1) è falsa devono essere false anche 2) e 3); se 2) è falsa il giorno può essere sabato, domenica o lunedì, se 3) è falsa il giorno può essere lunedì, martedì, mercoledì o giovedì: l'intersezione è lunedì. Se 1) è vera devono essere vere anche 2) e 3); se 2) è vera il giorno può essere martedì, mercoledì, giovedì o venerdì, se 3) è vera il giorno può essere venerdì, sabato o domenica: l'intersezione è venerdì.

Quesiti a risposta aperta

10. (Punti 4) L'insieme dei numeri interi tra 1 e 18 inclusi va ripartito in nove coppie, in modo che la somma dei due numeri che compongono ogni coppia sia un quadrato perfetto. In quanti diversi modi è possibile farlo?

Risposta: 0001. Soluzione. I quadrati perfetti ottenibili sommando i due numeri delle varie coppie possono essere solo 4, 9, 16 o 25. Si vede immediatamente che alcuni accoppiamenti sono obbligati: (18, 7), (17, 8), (16, 9); inoltre, visto che 9 – 2 = 7, è obbligato anche l'accoppiamento (2, 14). Da quest'ultimo segue però che anche tutti gli altri sono obbligati: si deve avere (11, 5), dunque nell'ordine (4, 12), (13, 3), (6, 10), (1, 15).

11. (Punti 5) In figura vedi un mattoncino isolato a forma di L ricavato da un cubo di lato 1 cm rimuovendo un parallelepipedo di dimensioni, in centimetri, ½, ½ e 1. Incollando 4 di questi mattoncini con 10 cubetti di lato 1 si è ottenuto il solido centralmente simmetrico che vedi in figura. Qual è, in centimetri quadrati, la sua superficie?



Risposta: 0042. Soluzione. Proiettando perpendicolarmente il solido dall'alto si ottiene una figura piana costituita dall'unione di 4 quadrati con 4 parti della faccia di un quadrato, ciascuna delle quali di area 3/4. Le possibili proiezioni di questo tipo lungo le altre due direzioni perpendicolari (due versi per ciascuna) sono 6, identiche fra loro.

In alternativa.

La parte esterna del solido è costituita da 4×3 cubetti come quello in figura, ognuno dei quali risulta avere in vista due facce complete (area complessiva 2 cm^2) e due facce scavate (area complessiva 3/2 cm^2) in totale 12×7/2 = 42 cm^2.

12. (Punti 5) Tre numeri interi a, b, c sono tali che $1 \le a \le b \le c$ e $ab + ac + bc = abc$. Quanto può valere al massimo c?

Risposta: 0006. Soluzione. Essendo i tre numeri diversi da 0, dividendo i due membri per abc la seconda condizione si può scrivere nella forma $(1/c) + (1/b) + (1/a) = 1$. È chiaro allora che, affinché c sia il più grande possibile, a e b devono essere i più piccoli possibile. Nessuno dei due può essere 1 e $a = b = 2$ non è accettabile, ma lo sono $a = 2$ e $b = 3$ o viceversa: in entrambi i casi c deve essere 6.

13. (Punti 6) Voglio esprimere il maggior numero possibile di interi utilizzando solo la cifra 4 ed esattamente quattro volte. Posso accostare più volte la cifra 4, utilizzare le quattro operazioni aritmetiche e disporre parentesi nei modi che ritengo opportuni. Ad esempio posso scrivere 0 = 4 – 4 + 4 – 4, oppure 15 = 44/4 + 4, oppure 160 = (44 – 4) × 4. Quanti dei numeri interi tra 0 e 10 compresi posso esprimere con questa procedura?

Risposta: 0011. Soluzione. 0 = 4 – 4 + 4 – 4; 1 = 44/44; 2 = 4/4 + 4/4; 3 = (4 + 4 + 4)/4; 4 = 4 – (4 – 4)/4; 5 = (4 × 4 + 4)/4; 6 = (4 + 4)/4 + 4; 7 = 44/4 – 4; 8 = 4 + 4 + 4 – 4; 9 = 4 + 4 + 4/4; 10 = (44 – 4)/4.

14. (Punti 6) Le ruote della bicicletta di Aldo hanno un raggio di 30 cm, quelle della bicicletta di Bernardo un raggio di 24 cm. Aldo e Bernardo iniziano a pedalare allo stesso istante nella stessa direzione e, a parità di tempo, il numero di giri fatti dalle loro ruote è lo stesso e si mantiene costante durante la pedalata. Dopo 15 minuti Aldo si ferma per aspettare Bernardo. Per quanti secondi lo dovrà aspettare?
Risposta: 0225. Soluzione. Il rapporto tra le lunghezze dei raggi (A/B) è 5/4, la lunghezza della circonferenza è proporzionale al raggio dunque la proporzione inversa vale tra i tempi necessari a percorrere una stessa distanza. Allora per arrivare dove è arrivato Aldo, a Bernardo serve 5/4 del tempo impiegato da Aldo, dunque 1/4 in più del tempo da lui impiegato finora.

15. (Punti 6) Di quanti numeri interi positivi il numero 17 è il più grande divisore proprio?
Risposta: 0007. Soluzione. 17 è divisore di ogni intero del tipo $17 \times k$ con k intero positivo. Affinché sia il più grande divisore, è chiaro che deve essere $k \leq 17$. È chiaro anche che sono accettabili tutti i numeri primi non maggiori di 17. Nessun altro k può esserlo: ogni divisore non primo maggiore di 1 fornirebbe un divisore di $17 \times k$ maggiore di 17.

16. (Punti 7) Assegnato un poligono convesso di n lati ($n > 3$), indichiamo con S_n il numero delle sue diagonali. Qual è il più piccolo valore di n tale che $S_n + S_{n-1} > 2024$?
Risposta: 0048. Soluzione. Per ogni $n > 3$ si ha $S_n = n(n-3)/2$, da cui $S_n + S_{n-1} = n^2 - 4n + 2$. Affinché si abbia $n^2 - 4n - 2022 > 0$ deve essere $n > 2 + \sqrt{2026}$. Il primo quadrato perfetto maggiore di 2026 è $2116 = 46^2$.

17. (Punti 7) Sommando i cubi di alcuni numeri interi positivi consecutivi si ottiene come risultato 2024. Quanto vale il prodotto del primo con l'ultimo di questi interi?
Risposta: 0018. Soluzione. Un noto teorema afferma che, per ogni intero positivo n, la somma dei cubi dei primi n interi positivi coincide con il quadrato della somma di questi primi n interi. La somma dei primi n interi positivi vale $n(n+1)/2$: velocemente si trova allora che $45^2 = 2025$ è la somma dei cubi degli interi da 1 a 9. Dunque 2024 è la somma dei cubi degli interi da 2 a 9.

18. (Punti 8) In un sacchetto ci sono alcune biglie verdi e alcune biglie rosse. Estraendone due a caso, la probabilità che siano entrambe dello stesso colore è 13 / 24. Quante possono essere, al minimo, le biglie nel sacchetto?
Risposta: 0016. Soluzione. Siano V e R rispettivamente il numero di biglie verdi e rosse. Allora la probabilità che estraendone due a caso non abbiano lo stesso colore è $\frac{2VR}{(V+R)(V+R-1)}$ e deve valere 11/24, cioè: $48VR = 11(V+R)(V+R-1)$. Poiché 11 è primo, deve dividere V (o R): per minimizzare il numero di biglie sia $V = 11$. Sostituendo si ricava $R^2 - 27R + 110 = 0$, che ha come soluzione minore $R = 5$ e quindi le biglie sono al minimo 16.