Testi e soluzioni della Coppa Student 2024

Università di Genova

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

ISBN: 978-88-94804-05-8
€ 9.00

Coppa Student 2024

L'Associazione Culturale Kangourou Italia opera in convenzione con:

- Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università degli Studi di Milano
- DIMA - Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Genova
- FIM - Dipartimento di Scienze fisiche, informatiche e matematiche dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Per informazioni: tel. 347 040 27 55
E-mail: matematica@kangourou.it
Sito: https://www.kangourou.it

In copertina: **Tobia Ravà 2017** - ***1404 Sviluppi a Rivo alto***

via Giacomo Medici 2 – 20900 Monza (MB)
Partita IVA 09638180969

ISBN: 978-88-94804-05-8

Coppa Student, seconda edizione ufficiale

Le due maggiori novità di questa seconda edizione sono la firma delle convenzioni con il ***DIMA*** - *Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova* e con il ***FIM*** - *Dipartimento di Scienze fisiche, informatiche e matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia* e il ritorno della finale a Cervia (RA). La convenzione con il *Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università di Milano* resta attiva e confermata come sempre da 25 anni.

Dopo aver nominato il professor **Lorenzo Repetto**, docente in quiescenza dell'ITIS Italo Calvino di Genova, *responsabile dei testi della Coppa Student*, ho ritenuto importante coinvolgere almeno altri due Dipartimenti di Matematica di Eccellenza nella creazione e nel controllo dei testi della gara.

Ho firmato le convenzioni tra l'Associazione Culturale Kangourou Italia e il DIMA ed il FIM. Ogni Dipartimento ha messo un docente a disposizione per seguire il lavoro di Lorenzo Repetto. Cito, e ringrazio, i docenti: **Simone Muselli** del DIMA e **Roberto Cavicchioli** del FIM.

Lo spostamento della sede della finale al Palazzetto dello Sport di Cervia (RA) ci è stato suggerito e richiesto dai docenti accompagnatori delle squadre in quanto la sede di Roma dello scorso anno ha mostrato alcune difficoltà logistiche e di costi.

Ringrazio **CASIO** che ha creduto in noi da subito e ha offerto quattro webinar di formazione per docenti e concorrenti, specialmente dedicati alla Coppa Student, e le favolose FX - CG50, oltre al supporto per la divulgazione dell'evento;

Ringrazio **Master Studio** per la generosa offerta di un viaggio all'estero ad ognuno dei componenti della squadra vincente;

Ringrazio l'**Hard Rock Cafe** che da anni ci segue e regala ai migliori concorrenti oggetti tratti dal suo catalogo, molto appetibile dai giovani partecipanti;

Ringrazio tutti i miei collaboratori, **Cristina** alla segreteria, i tecnici **Pamela**, **Pietro** e **Alberto,** lo staff sempre presente **Elisabetta** e **Giovanni**, **Lucia** e **Giorgio, Aurelia** e **Diego, Chiara, Roberta** e **Matteo,** il Dipartimento di Matematica di Milano con **Paola, Clemente, Stefania**.

Ringrazio i responsabili degli Hotel di Cervia **Leo** e **Loredana**, **Federico Risi**, il responsabile del Palazzetto di Cervia.

Ringrazio per il Comune di Cervia, l'Assessore **Cesare Zavatta** e il Presidente del Consiglio Comunale **Gianni Grandu**.

Buon gioco a tutti.

Prof. Angelo LISSONI
Presidente Associazione Culturale
Kangourou Italia

Milano, 15 aprile 2024

Testi
della prima
selezione

4 aprile 2024

Quesito A1 – Composizione di cubi

Luigino ha tanti cubetti, tutti di lato 1 cm, e con essi vorrebbe formare 13 cubi (pieni) diversi, con i lati da 1 cm sino a 13 cm.
In totale, di quanti cubetti avrebbe bisogno?

Quesito A2 – Strane banconote

Silvana è in vacanza nel paese di Syldavia, dove circolano banconote da 63, 77, 99 e 239 corone. Silvana acquista una collana, il cui prezzo è 2020 corone, che ella paga esattamente con numeri dispari di banconote di ciascun taglio.
Quante banconote da 63 corone ha usato, come minimo?

Quesito A3 – Una funzione con due zeri reali

Considerate la funzione $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$, per valori reali di x.

1. Essa ha due zeri (valori di x per cui si annulla) reali: calcolateli, approssimandoli al centesimo.
2. Calcolate poi ascissa e ordinata del punto di minimo (assoluto) della funzione $f(x)$.

Date infine come risposta la somma dei valori assoluti dei quattro numeri che avete calcolato.

Quesito A4 – Una mostra temporanea

Il direttore di un museo deve allestire una mostra temporanea di quadri, provenienti da varie collezioni. L'ala dell'edificio riservata alle mostre temporanee ha parecchie sale, disposte su due piani. Il direttore è indeciso tra due alternative: collocare 12 quadri in ciascuna sala, sia al primo piano sia al secondo, oppure sistemare i quadri più grandi al primo piano, 8 per sala, e i più

piccoli al secondo piano, 15 per sala…
Ma poi ricorda che una sala al secondo piano deve essere riservata a un percorso multimediale, sicché non potrà ospitare quadri, e allora decide di collocare 12 quadri in ciascuna delle rimanenti sale del secondo piano e 14 quadri in ciascuna sala del primo piano.

Quanti sono, in tutto, i quadri da esporre?

Quesito A5 – Un'equazione trigonometrica

Trovate il valore di x (in radianti), compreso tra 0 e $\pi/2$, che soddisfa l'equazione

$$\sin(x\sqrt{\pi}) + \sin(2x^2) = 2,$$

e *date come risposta le prime quattro cifre significative.*

Quesito A6 – Una successione che diviene presto periodica

Definiamo una successione (di numeri naturali) $\{u_n\}$, con $n \in \mathbf{N}$, nel seguente modo:

$$u_0 = u_1 = 4, \quad u_2 = 3, \qquad\qquad u_{n+3} = (5u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n) \; mod \; 6,$$

dove *mod* (%, in Python) è il nome dell'operazione che dà il resto della divisione intera.
Da un certo u_k in poi, la sequenza di valori diventa periodica di periodo p; più precisamente, p è il più piccolo numero intero positivo tale che,

$$\text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \quad u_{k+n+p} = u_{k+n}.$$

Qual è il valore di p?

Quesito A7 – Elevamenti a potenza

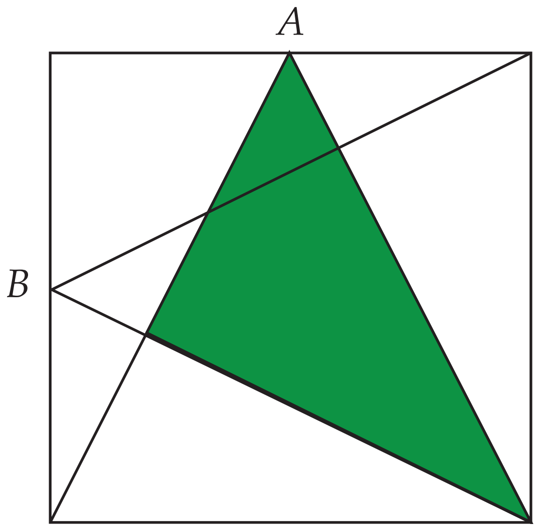
Ponendo $a = 7^x$ e $b = 2^x$, **calcolate il valore di x che soddisfa l'uguaglianza**

$$5^a = 13^b$$

e date come risposta le sue tre cifre più significative.

Quesito A8 – L'area del quadrato

Nel quadrato mostrato in figura, A e B sono i punti medi dei rispettivi lati.

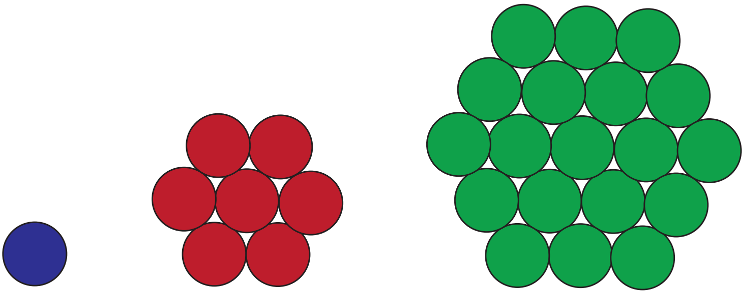


Sappiamo che si tratta del più piccolo quadrato tale che le lunghezze dei lati del triangolo colorato in verde sono tutte e tre espresse da numeri interi, in una certa unità di misura u.

Quanto vale, misurata in u^2, l'area del quadrato?

Quesito A9 – I numeri “esagonali”

Paolino ha iniziato a disporre alcune sue biglie come sotto illustrato, formando così tre “esagoni” (il primo costituito, tuttavia, da una sola biglia).



Paolino vorrebbe continuare il suo gioco, costruendo “esagoni” sempre più grandi, sino ad averne 12.

Quante biglie gli occorrono, in tutto, comprese quelle che vedete qui sopra?

Quesito A10 – Colorare due solidi

Carlo ha costruito con il legno due solidi: un tetraedro regolare e un cubo; ora vuol dipingerli, ciascuno col minor numero possibile di colori, ma in modo tale che due facce confinanti su uno spigolo non abbiano lo stesso colore. Egli ha calcolato che, con i colori di cui dispone, per il tetraedro può scegliere tra ben 10626 combinazioni di colori.

Quante sono le possibili combinazioni di colori per dipingere il cubo?

Quesito A11 – Lancio di tre dadi

Aldo lancia tre dadi (di quelli usuali, ben equilibrati, con sei facce numerate da 1 a 6) e il suo punteggio è dato dalla somma dei tre numeri ottenuti. La stessa cosa fa Bruno.

Qual è la probabilità che Bruno ottenga lo stesso punteggio di Aldo?

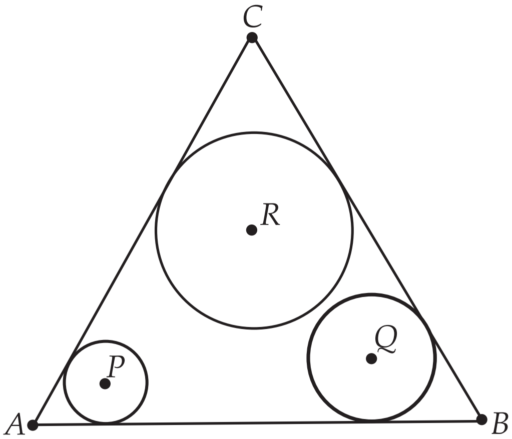
Date come risposta la probabilità richiesta moltiplicata per 1000, arrotondando all'intero più vicino.

Quesito A12 – Sequenze divisibili per 7

Consideriamo i numeri di 10 cifre decimali, tutte diverse da 0. **Quanti di essi hanno la proprietà che ogni sotto-sequenza di due cifre adiacenti è un numero (di due cifre diverse da 0) divisibile per 7?**

Quesito A13 – Tre cerchi in un triangolo

Nel triangolo equilatero *ABC*, di lato 160 cm, le tre circonferenze (tangenti ai lati) di centri *P*, *Q* e *R* hanno raggi di 10, 20 e 30 centimetri, rispettivamente.



Quanti centimetri quadrati misura l'area del triangolo *PQR*?
Arrotondate il risultato all'intero più vicino.

Nota: *la figura qui sopra disegnata non è precisamente in scala.*

SCHOOL OF
HARD ROCK
IL TEMPIO DELLA MUSICA ROCK SI
APRE AL MONDO DELLA SCUOLA
Programmi didattici dedicati a tutti i ragazzi
delle scuole primarie e secondarie di I e II Grado.
MUSIC EDUCATION
SCHOOL OF
Hard Rock
Hard Rock
CAFE
PER INFORMAZIONI & PRENOTAZIONI
FIRENZE - florence_social@hardrock.com | Tel. 055 277841
VENEZIA - venice_social@hardrock.com | Tel. 041 5229665
ROMA - rome_social@hardrock.com | Tel. 06 42030501
FIRENZE - ROMA - VENEZIA
#HardRockCafe | hardrockcafe.com
©2023 Hard Rock International (USA), Inc. All rights reserved.

Testi
della seconda
selezione

16 aprile 2024

Quesito B1 – Un quadrato perfetto

Qual è il più piccolo numero intero positivo che, moltiplicato per 2024, dà un quadrato perfetto?

Quesito B2 – Tre interi

Trovate tre diversi interi positivi *a*, *b*, *c*, minori di 25, tali che

$$20 \;/\; 19 = (a^3 + b^3) \;/\; (a^3 + c^3).$$

Scrivete, come risposta, il loro prodotto.

Quesito B3 – Dove vale 1?

Considerate la funzione

$$f(x) = x \cdot (1 - \ln(x))^2,$$

per valori reali positivi di x (ln(.) denota la funzione logaritmo naturale, ossia in base e).

1. Per $x = 1$, la funzione data vale 1, ma ci sono altri due valori di x, uno minore di 1 e l'altro maggiore di 1, per cui essa vale 1: calcolateli, approssimandoli entrambi al centesimo.
2. Nell'intervallo (0, 1), $f(x)$ ha un punto di massimo relativo: calcolatene l'ascissa e l'ordinata, approssimando entrambe al centesimo.

Date infine come risposta la somma dei quattro numeri che avete calcolato moltiplicata per 10.

Quesito B4 – La successione di Lucas

Il matematico francese ***Édouard Lucas***, vissuto nel XIX secolo, diede notevoli contributi alla teoria dei numeri, ma forse oggi è più conosciuto per i suoi divertimenti matematici e *puzzle*, come la famosa *Torre di Hanoi*.
Qui proponiamo una successione da lui studiata, simile – nella formulazione – a quella di Fibonacci: cambia infatti soltanto una condizione iniziale.
Definiamo la successione (di numeri naturali) $\{L_n\}$, con $n \in \mathbf{N}$, nel seguente modo:

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1, \qquad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Quale numero è L_{25}?
Date come risposta le sue ultime quattro cifre (le meno significative).

Quesito B5 – Un'equazione diofantea quadratica

Trovate tutte le coppie (x, y) di numeri interi positivi che soddisfano l'equazione

$$x^2 - 9y^2 - 315 = 0$$

e *date come risposta la somma di tutti i valori trovati, sia di x sia di y.*

Quesito B6 – La radice *n*-esima di *n*

Consideriamo la radice n-esima di n, per $n = 1, 2, 3, \ldots, 100$.
Per quale n tale radice ha il valore più grande?

Quesito B7 – Le cifre di 2024

Quanti sono i numeri interi da 0 a 20242024 compresi, che sono costituiti dalle sole cifre 0, 2 e 4 ?

Quesito B8 – Guasti

Un certo sistema è costituito da 68 componenti. La probabilità che un componente si guasti, indipendentemente dagli altri, nell'intervallo di tempo (t_1, t_2), con $0 \leq t_1 < t_2$, è data dall'integrale della funzione

$$\exp(-t \,/\, T)$$

calcolato rispetto a t, da t_1 a t_2, diviso $5T$.

Determinate la probabilità che, prima di $T/4$ dall'istante di avvio del sistema ($t = 0$), non si guastino più di 5 componenti.

Arrotondate il risultato all'intero percentuale più vicino; ad esempio, se la probabilità richiesta risultasse 0,857… scrivete 86.

Suggerimento: *ciascun componente può essere considerato una "prova" di Bernoulli, in quanto può guastarsi, ossia avere "successo", oppure no, indipendentemente dagli altri componenti, nel periodo considerato.*

Quesito B9 – Una questione di divisibilità

La funzione F sui numeri naturali ha le seguenti proprietà:

$$F(0) = 23$$
$$F(n) = n \cdot F(n-1) \quad \text{per ogni } n \text{ intero positivo}$$

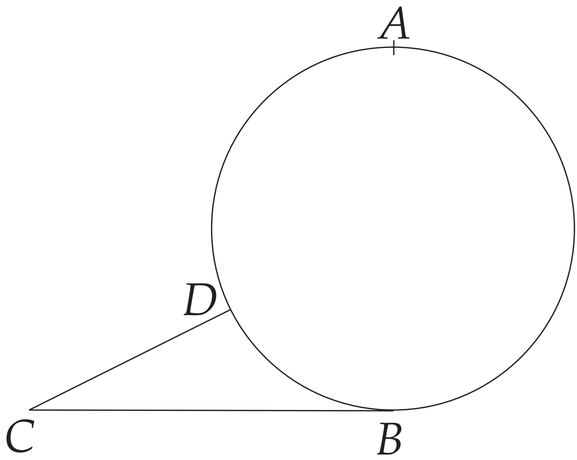
Dopo aver trovato il più piccolo n tale che $F(n)$ sia divisibile per 546480, **date come risposta il quoziente $F(n)$ / 546480**.

Quesito B10 – Una bella proporzione!

Nella figura qui sotto, il segmento BC ha la stessa lunghezza del diametro AB della circonferenza ed è ad esso perpendicolare. Il segmento CD sta sulla retta che passa per C e il centro della circonferenza.

Qual è il rapporto tra la distanza *DA* e la distanza *DB* ?

Date come risposta le prime quattro cifre significative del numero decimale che esprime il rapporto DA / DB.



Quesito B11 – Somme di palindromi

Diciamo che un numero intero positivo, espresso in notazione decimale, è ***palindromo*** se non termina con 0 e può essere letto sia da sinistra a destra sia da destra a sinistra; ad esempio, sono palindromi 6, 55, 313, 1221.

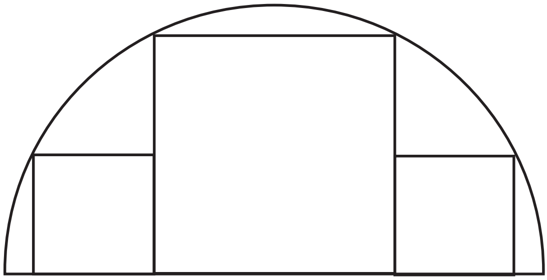
Il numero 2024 può essere espresso in diversi modi come somma di tre ***palindromi***

$$A, B, C, \text{ tali che } A \leq B \leq C.$$

Qual è il minimo valore che *C* può assumere?

Quesito B12 – Quadrati all'interno di un semicerchio

All'interno di un pavimento di forma semicircolare, con diametro 416 cm, sono disegnati tre quadrati, in modo simmetrico rispetto all'asse del diametro, come mostrato in figura; ciascuno dei quadrati più piccoli (uguali) ha un vertice sulla semicirconferenza, il quadrato più grande ne ha due.



Calcolate la lunghezza del lato dei quadrati più piccoli, espressa in centimetri (e *arrotondata al centimetro*).

Quesito B13 – Naturali notevoli

Si parte da un numero naturale n, si calcola il suo quadrato e, in questo, si incrementa di 1 modulo 10 la prima cifra, ossia quella più a sinistra (dunque, se tale cifra è 9 si sostituisce con 0). Se si ottiene un quadrato (escludendo eventuali cifre 0 a sinistra), diciamo che il numero di partenza n è ***notevole***.
Ad esempio:

24 è ***notevole***, poiché $24^2 = 576$ e 676 è il quadrato di 26;
95 è ***notevole***, poiché $95^2 = 9025$ e (00)25 è il quadrato di 5.

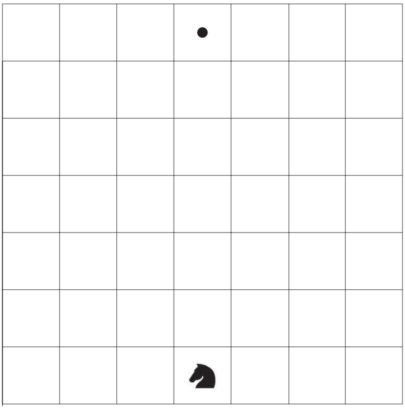
Qual è il più piccolo numero *notevole* di quattro cifre?

Testi della finale nazionale

6 maggio 2024

Quesito C1 – I cammini più brevi del Cavallo

Quanti sono i diversi percorsi (ossia le diverse sequenze di mosse) **che il Cavallo può fare per arrivare nella casa segnata in alto**, su questa scacchiera 7×7, partendo dalla posizione mostrata e facendo il minor numero di salti?



Quesito C2 – Un quadrato palindromo

Trovate un numero palindromo di sei cifre (*la prima e l'ultima diverse da 0*) **che sia un quadrato perfetto**.
Date come risposta le prime tre cifre (da sinistra).

Nota:

- *"**palindromo**" significa che è uguale al suo rovescio, ad esempio 123321;*
- *"**quadrato perfetto**" significa che la sua radice quadrata è un numero intero.*

Quesito C3 – A un ballo in maschera… più frequentato!

Cinque coppie di ballerini si recano a un ballo in maschera; ogni donna, e così ogni uomo, porta in una borsa il proprio costume, e niente sa dei costumi altrui. Una volta giunti alla sala da ballo, le cinque donne si cambiano in un camerino, i cinque uomini in un altro. Dopodiché, per il ballo, le cinque coppie vengono formate in modo casuale.
Diciamo che una coppia è ***legittima*** se è formata da un uomo e una donna che si erano recati insieme al ballo in maschera.
Qual è la probabilità che si formi al massimo una coppia *legittima* ?

Date la risposta arrotondata all'unità percentuale più vicina (che risulterà un intero di due cifre).

Quesito C4 – L'evoluzione di un'epidemia

Studiando l'andamento di un'epidemia, per i 18 mesi successivi al momento del suo insorgere (assunto come tempo 0), si è appurato che la frazione di popolazione ammalata è bene approssimata dalla soluzione della seguente equazione differenziale (lineare):

$$\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t = \exp(-t/3) \cdot (t+1)/9 - p(t)/3$$

avendo espresso il tempo t in mesi e posto $p(0) = 0$.

Per risolvere numericamente questa equazione, applichiamo un noto ***metodo di integrazione numerica*** che approssima $y(t)$,
soluzione dell'equazione $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = f(t, y(t))$,
agli istanti $t(i) = i \cdot h$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$,
con la successione $y(t(i+1)) = y(t(i)) + (K_1(i) + K_2(i)) \cdot h/2$,

dove

$$K_1(i) = f(t(i), y(t(i))) \quad \text{e} \quad K_2(i) = f(t(i+1), y(t(i)) + h \cdot K_1(i)),$$

dato $y(0)$ e fissato un valore opportuno per il passo h.

In base a questo calcolo, con passo $h = 0.1$, **qual è stato il massimo valore raggiunto da $p(t)$, per $t > 0$, ovvero la massima frazione di popolazione ammalata?**

Date come risposta le prime quattro cifre esatte dopo il punto decimale.

Suggerimento: *simulate soltanto i primi sei mesi.*

Quesito C5 – Un algoritmo per le frazioni egizie

Vogliamo rappresentare la frazione propria p/q (dunque con $p < q$) come somma di frazioni unitarie (dunque con 1 a numeratore).

Un procedimento, descritto da ***Fibonacci*** nel suo famoso ***Liber Abaci*** del 1202, consiste nei seguenti passi:

1. si trova il più piccolo n tale che $1/n \leq p/q$ e si scrive su un foglio la frazione $1/n$;
2. se $1/n = p/q$ il procedimento termina, altrimenti si prosegue;
3. si calcola la differenza $p/q - 1/n$ e si prende questa come nuova frazione p/q;
4. si torna al passo 1.

La somma delle frazioni scritte man mano sul foglio è uguale alla frazione p/q da cui siamo partiti.

Trovate la rappresentazione della frazione 21/23 prodotta dall'algoritmo di Fibonacci, e *date come risposta le prime quattro cifre (da sinistra) dell'ultimo denominatore calcolato, che è il più grande.*

Quesito C6 – Strani numeri primi

31, 331, 3331 sono numeri primi. Ad ogni passo, aggiungete in testa una cifra 3, fino a trovare un numero che non sia primo; quindi scomponete questo numero nei suoi fattori primi, e **date come risposta le prime quattro cifre (da sinistra) del maggiore di tali fattori primi.**

Quesito C7 – Equazioni di terzo grado

Com'è noto, la forma generale di un'equazione di terzo grado a coefficienti reali è

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0, \text{ con } a \neq 0,$$

e le sue radici X, Y, Z sono tutte e tre reali (non è detto distinte) oppure una è reale e le altre due sono complesse coniugate.

Ponendo $a = 2$, $b = -10$, $c = 7$ e $d = 23$, **calcolate la somma dei cubi delle tre radici:**

$$X^3 + Y^3 + Z^3.$$

Quesito C8 – Una trasformazione sul piano

Definiamo due operazioni sui punti del piano cartesiano, l'elevamento al quadrato di un punto e l'addizione di due punti, nel seguente modo:

$$(x, y)^2 = (x^2 - y^2, 2xy)\ ; \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Partendo da un punto fissato $\boldsymbol{p}_1 = (X, Y)$, operiamo la trasformazione

$$\boldsymbol{p}_{n+1} = \boldsymbol{p}_n{}^2 + \boldsymbol{p}_1 \qquad \text{per } \boldsymbol{n} = 1, 2, 3, \ldots$$

Assumendo $X = -0.4$ e $Y = 0.4$, **calcolate la distanza del punto p_{18} dall'origine del piano**, e *date come risposta le prime quattro cifre significative.*

Quesito C9 – Due successioni di numeri reali

Assegnati due numeri reali positivi a e b, definiamo due successioni (di numeri reali) $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$, con $n \in \boldsymbol{N}$, nel seguente modo:

$$u_0 = a \qquad v_0 = b \qquad u_{n+1} = a \cdot \sqrt{v_n} \qquad v_{n+1} = b \cdot \sqrt{u_n}$$

A quale valore tende il rapporto u_n / v_n per n tendente a infinito?
Date come risposta le prime quattro cifre significative, avendo assunto come valori iniziali $a = 5$ e $b = 2$.

Quesito C10 – Il cane da guardia

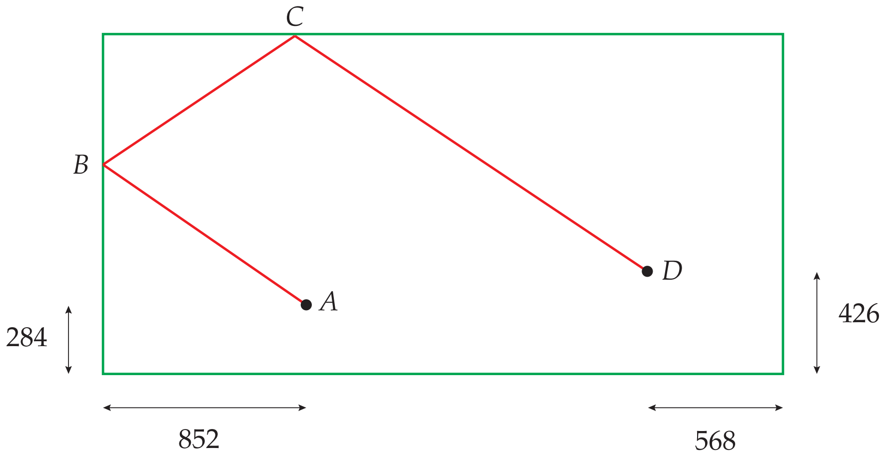
Un cane è posto a guardia di una torre a pianta quadrata di lato 6 metri, legato a una catena lunga 14 metri, la cui altra estremità è fissata a un angolo della torre.
Quanto misura, in metri quadrati, l'area della superficie, esterna alla torre, in cui il cane può trovarsi?
Date come risposta le prime quattro cifre significative.

Quesito C11 – Un quadrato attorno al triangolo

Su un grande foglio, è stato disegnato un triangolo equilatero di 27 centimetri di lato; ora si vuol disegnare attorno ad esso un quadrato, in modo tale che ciascuno dei tre vertici del triangolo venga a trovarsi o su un lato o in un vertice del quadrato. Inoltre, si desidera che la lunghezza del lato del quadrato sia la minima possibile.
Quanti centimetri quadrati misurerà l'area del quadrato?
Arrotondate il risultato all'intero più vicino.

Quesito C12 – Due sponde

Un tavolo da biliardo all'italiana (senza buche) ha il piano rettangolare di lunghezza 284 cm e larghezza 142 cm. Considerando le palle puntiformi, si vuole colpire la palla in D con la palla in A, facendo rimbalzare quest'ultima dapprima sulla sponda sinistra (in B) e poi sulla sponda in alto (in C), secondo il noto principio "*l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione*".



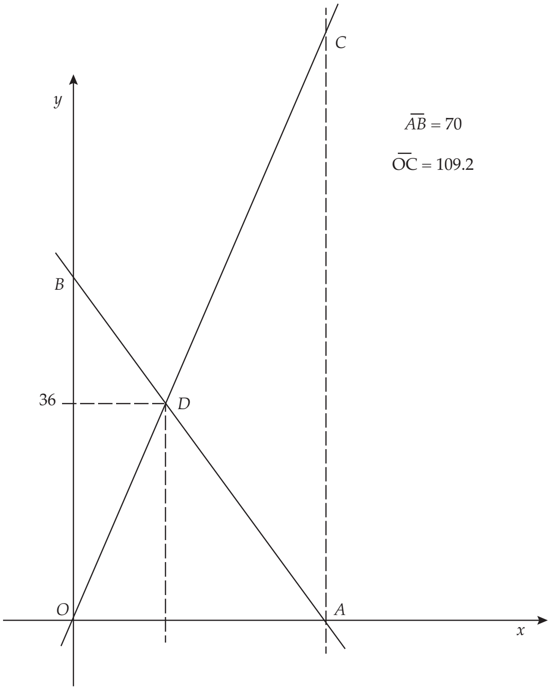
In figura sono riportate le distanze, in millimetri, di A e D da due delle sponde.

Calcolate la lunghezza del primo segmento *AB*, espressa in centimetri (*e arrotondata al centimetro*).

Attenzione: *la lunghezza di AB non è la stessa di BC!*

Quesito C13 – Sembra facile…

Sono tracciate due rette sul piano cartesiano, una delle quali passante per l'origine, com'è indicato nel diagramma.



Sono note soltanto le lunghezze dei segmenti *AB* e *OC* (70 e 109.2 unità, rispettivamente) e l'ordinata del loro punto di intersezione *D* (36 unità).

Calcolate l'ascissa del punto *A*.

(*La risposta è un intero di due cifre.*)

Nota: *la figura qui sopra disegnata non è precisamente in scala.*

Soluzioni della prima selezione

4 aprile 2024

Quesito A1 – Composizione di cubi

Risposta: 8281.
Dobbiamo calcolare la somma dei cubi dei numeri interi da 1 a n:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3, \text{ con } n = 13;$$

per n più grandi, converrebbe usare il foglio elettronico della calcolatrice o scrivere un programmino…
Tuttavia, c'è un modo assai più veloce.
Come sappiamo – e si dimostra facilmente per induzione aritmetica – la somma dei primi n numeri interi positivi è uguale a $n \cdot (n + 1)/2$;
ma forse non è altrettanto noto che *fu il matematico e filosofo neopitagorico* ***Nicomaco di Gerasa****, vissuto tra il I e il II secolo, a dimostrare che il quadrato di tale somma è uguale proprio alla somma dei cubi dei numeri interi da 1 a n.*
Possiamo così giungere alla risposta nel modo più rapido – anche a mano! – calcolando, nel nostro caso, il quadrato di $13 \cdot 14/2 = 13 \cdot 7$, che è $169 \cdot 49 = 8281$.

Quesito A2 – Strane banconote

Risposta: 13.
Vi sono due soli modi per formare 2020 corone con i tagli disponibili, tutti in numero dispari:

13 banconote da 63 corone, 5 da 77, una da 99 e 3 da 239;
15 banconote da 63 corone, 7 da 77, 3 da 99 e una da 239.

Per risolvere l'equazione $63\,a + 77\,b + 99\,c + 239\,d = 2020$, con a, b, c e d interi positivi dispari, dopo aver notato che le quattro incognite non possono superare, rispettivamente, i valori 31, 25, 19 e 7, si può ricorrere all'esecuzione del seguente programma in Python:

```
for a in [0] + range(1, 32, 2):
    for b in [0] + range(1, 26, 2):
        for c in [0] + range(1, 20, 2):
            for d in [0, 1, 3, 5, 7]:
                if 63*a + 77*b + 99*c + 239*d == 2020:
                    print(a, b, c, d)
```

che permette anche di verificare la necessità di tutti e quattro i tagli disponibili delle banconote.

Volendo procedere per via analitica, poniamo

$$a = 2\,e + 1,\ b = 2\,f + 1,\ c = 2\,g + 1,\ d = 2\,h + 1$$

nell'equazione da risolvere:

$$63\,(2\,e + 1) + 77\,(2\,f + 1) + 99\,(2\,g + 1) + 239\,(2\,h + 1) = 2020,$$

da cui $63\,e + 77\,f + 99\,g + 239\,h = 771$.

Operiamo su questa equazione modulo 9 e modulo 7, ottenendo rispettivamente:

$$5\,f + 5\,h = 6\ (mod\ 9),$$

ossia, moltiplicando per 2 ambo i membri,

$$f + h = 3\ (mod\ 9),$$

e siccome

$$f + h \leq 771\ //\ 77 = 10\ (\textit{dove // è l'operatore di divisione intera})$$

abbiamo $f + h = 3$;

$$g + h = 1\ (mod\ 7),$$

e siccome

$$g + h \leq 771\ //\ 99 = 7$$

abbiamo $g + h = 1$.

Si danno quindi due casi: $h = 0$ o $h = 1$.

- Se $h = 0$, allora $f = 3$ e $g = 1$,
  da cui si ricava $e = 7$;
- se $h = 1$, allora $f = 2$ e $g = 0$,
  da cui si ricava $e = 6$.

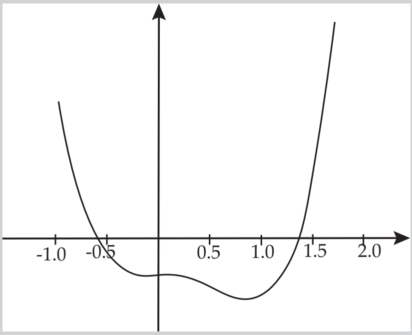
Il minimo numero di banconote da 63 corone si ha nel secondo caso, in cui esse sono $a = 2\,e + 1 =$ **13**.

Quesito A3 – Una funzione con due zeri reali

Risposta: 5.

La risposta è data dalla somma 0,56 + 1,44 + 1 + 2 = 5.

1. Gli zeri della funzione data sono – 0,56 e 1,44. Il suo grafico, delineato in figura, può essere rappresentato sul display della calcolatrice grafica CASIO fx-CG50, e mediante il comando **G-SOLV ROOT** è possibile trovare gli zeri.



(Volendo, con la calcolatrice nella normale modalità di calcolo, potremmo verificare che $f(-0{,}565) = 0{,}027\ldots > 0$ e $f(-0{,}555) = -0{,}0315\ldots < 0$; inoltre, $f(1{,}435) = -0{,}0987\ldots < 0$ e $f(1{,}445) = 0{,}01076\ldots > 0$. Pertanto i due punti di zero sono approssimabili con $-0{,}56$ e $1{,}44$.) Se dovessimo rispondere soltanto a questa prima domanda, la via più diretta sarebbe l'uso del menù ***Equazioni Algebriche*** della calcolatrice…

2. Le coordinate del punto di minimo sono $(1; -2)$, ed è immediato trovarle con la calcolatrice grafica, grazie al comando **G-SOLV MIN**.

Volendo procedere per via analitica, la derivata prima di $f(x)$ è

$$12x^3 - 12x^2 = 12x^2 \cdot (x - 1),$$

che si annulla per $x = 0$ (dove $f(x)$ presenta un flesso a tangente orizzontale) e per $x = 1$; dal grafico, si vede che il punto di minimo si trova in $x = 1$, dove la funzione vale $3 - 4 - 1 = -2$.

Quesito A4 – Una mostra temporanea

Risposta: 168.

Siano: p il numero di sale al primo piano, s il numero di sale al secondo piano (compresa la sala da riservare al percorso multimediale), N il numero di quadri da esporre. Le due alternative, in un primo tempo considerate dal direttore del museo, ci permettono di scrivere le seguenti equazioni:

$$N = 12p + 12s$$
$$N = 8p + 15s$$

Dopodiché, in base alla decisione da lui presa, possiamo scrivere una terza equazione:

$$N = 14p + 12 \cdot (s - 1)$$

Si tratta dunque di risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite… a valori interi positivi, se il quesito è ben posto! Si può far risolvere automaticamente dalla calcolatrice **CASIO fx-CG50**; oppure, se si procede a mano, dalla terza equazione, sfruttando poi la prima, si ha:

$$N = 12p + 2p + 12s - 12 = N + 2p - 12,$$

e quindi $p = 6$;
e allora, dalle prime due equazioni:

$$12 \cdot 6 + 12s = 8 \cdot 6 + 15s,$$

e quindi $s = 8$;
infine, considerando ancora la prima equazione:

$$N = 12 \cdot 6 + 12 \cdot 8 = 12 \cdot 14 = \mathbf{168.}$$

Quesito A5 – Un’equazione trigonometrica

Risposta: 8862.
Devono essere allo stesso tempo soddisfatte due uguaglianze:

$$\sin(x\sqrt{\pi}) = 1 \quad \text{e} \quad \sin(2x^2) = 1,$$

$$\text{da cui} \quad x\sqrt{\pi} = \pi/2 \quad \text{e} \quad 2x^2 = \pi/2.$$

Da entrambe si ricava $x = (\sqrt{\pi}) / 2 \approx$ **0.8862269.**

Quesito A6 – Una successione che diviene presto periodica

Risposta: 24.
Dopo il primo 4, la successione continua con il periodo: 4, 3, 5, 0, 3, 1, 2, 1, 1, 0, 5, 3, 0, 1, 5, 4, 1, 3, 2, 3, 3, 4, 5, 1, come si può facilmente verificare mediante un programma in Python:

```
a = 4
b = 4
c = 3
print(0, a)
print(1, b)
print(2, c)
for i in range(3, 28):
    d = (5*c - 3*b + 2*a)%6
    print(i, d)
    a = b
    b = c
    c = d
```

E dunque $k = 1$ e $p = 24$.

Un altro modo di risolvere il quesito parte dall’osservare che tutti i termini della successione sono resti della divisione per 6, e dunque, indicando con p_2 e p_3 rispettivamente i periodi delle successioni $\boldsymbol{u_n}$ mod 2 e $\boldsymbol{u_n}$ mod 3, il periodo p sarà uguale al minimo comune multiplo di p_2 e p_3.
***Modulo 2**, la successione diventa $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+3} = (u_{n+2} + u_{n+1}) \bmod 2$, e dai primi termini 0 0 1 1 0 1 1 osserviamo che $p_2 = 3$.*
***Modulo 3**, la successione diventa $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_{n+3} = (2u_{n+2} + 2u_n) \bmod 3$, e dai primi termini 1 1 0 2 0 0 1 2 1 1 0 osserviamo che $p_3 = 8$.*
*Il minimo comune multiplo di p_2 e p_3 è **24**.*

Quesito A7 – Elevamenti a potenza

Risposta: 372.
Applicando una funzione logaritmo, si deve avere

$$a \cdot \log(5) = b \cdot \log(13),$$

$$\text{ossia} \qquad 7^x \cdot \log(5) = 2^x \cdot \log(13),$$

e applicando ancora una funzione logaritmo (non necessariamente con la stessa base della precedente):

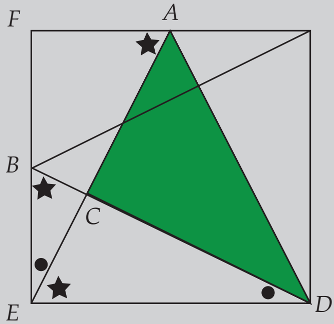
$$x \cdot \log(7) + \log(\log(5)) = x \cdot \log(2) + \log(\log(13)),$$

da cui:

$$x = (\log(\log(13)) - \log(\log(5)))\ /\ (\log(7) - \log(2)) \approx \mathbf{0.37202.}$$

Quesito A8 – L'area del quadrato

Risposta: 20. Per risolvere il problema, dobbiamo trovare la lunghezza del lato del quadrato, che indichiamo con x.



Dall'uguaglianza dei due triangoli rettangoli *AFE* e *BED*, si deduce che anche l'angolo *CED* è complementare dell'angolo *CDE*, per cui l'angolo in *C* è retto e i triangoli *BED*, *ECD* e *BCE* sono simili.
Per il teorema di Pitagora, da $ED = x$ e $BE = x\ /\ 2$ si ricava $BD = (x\ /\ 2) \cdot \sqrt{5}$.
$BC = CE\ /\ 2$, $CE = CD\ /\ 2$, e quindi $BC = CD\ /\ 4$, per cui

$$CD = (4\ /\ 5)\ BD = (4x\ /\ 10) \cdot \sqrt{5}.$$

Dato che $AE = BD$, si ha $AC = (3\ /\ 5)\ BD = (3x\ /\ 10) \cdot \sqrt{5}$, e per il teorema di Pitagora $AD = (5x\ /\ 10) \cdot \sqrt{5}$.
Ponendo $(x\ /\ 10) \cdot \sqrt{5} = 1\ (u)$, le lunghezze (espresse in u) dei lati *AC*, *CD* e *AD* del triangolo in verde sono rispettivamente 3, 4 e 5, la più piccola terna pitagorica. Quindi $x = 2\sqrt{5}\ (u)$ e $x^2 = 20\ (u^2)$.

Quesito A9 – I numeri "esagonali"

Risposta: **1728.**
In generale, la somma dei primi n numeri "***esagonali***" è $\boldsymbol{n^3}$. Notiamo che il secondo "*esagono*" è costituito da 1 + 6 biglie, il terzo da 1 + 6 + 12 biglie, il quarto da 1 + 6 + 12 + 18 biglie, e così via: dunque, l'esagono k - esimo, per $k \geq 1$, è formato da

$$1 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + k - 1) = 1 + 3 \cdot (k - 1) \cdot k = 3k^2 - 3k + 1 \text{ biglie.}$$

La somma di queste espressioni, con k da 1 a n compreso, equivale proprio a $\boldsymbol{n^3}$.
Si può dimostrare per induzione aritmetica, ma più semplicemente basta osservare che

$$3k^2 - 3k + 1 = k^3 - (k - 1)^3.$$

In altre parole, pensando di avere dei cubetti al posto delle biglie, questa è proprio la quantità di cubetti da aggiungere a un cubo formato da $(k - 1)^3$ cubetti (dunque di lato $k - 1$) per ottenere un cubo formato da k^3 cubetti (dunque di lato k).
E sommando le quantità $k^3 - (k - 1)^3$ per k da 1 a n, rimane soltanto $\boldsymbol{n^3}$.

Quesito A10 – Colorare due solidi

Risposta: **2024.**
Il tetraedro ha quattro facce, ognuna delle quali confina con le altre tre, e quindi per esso occorrono 4 colori; detto n il numero di colori di cui Carlo dispone, sappiamo allora che

$$\text{comb}(n, 4) = 10626,$$

essendo in generale

$$\text{comb}(n, k) = n! \;/\; (k! \,(n - k)!)$$

il numero di combinazioni di n elementi presi a gruppi di k, e quindi:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \;/\; 4! = 10626,$$

da cui si ricava facilmente, con l'aiuto della calcolatrice, $n = 24$.
Per dipingere il cubo bastano 3 colori, uno per ciascuna coppia di facce opposte; dunque Carlo può scegliere tra
$\text{comb}(24, 3) = 24 \cdot 23 \cdot 22 \;/\; 6 =$ **2024 combinazioni di colori**.

Quesito A11 – Lancio di tre dadi

Risposta: 93.

Gli esiti possibili del lancio di tre dadi sono $6^3 = 216$, e i relativi punteggi (da un minimo di 3 a un massimo di 18) sono ripartiti come mostrato nella seguente tabella:

punteggio	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
esiti	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Ad esempio, il punteggio 5 si può ottenere con due combinazioni (1, 1, 3 e 1, 2, 2) a ciascuna delle quali corrispondono tre esiti (alla prima, il 3 può uscire sul primo o sul secondo o sul terzo dado; idem per 1 alla seconda combinazione); analogamente per il punteggio "*complementare*" 16 (*si noti la simmetria degli esiti*).
Pertanto, la probabilità che i due punteggi siano uguali è data da:

$$2 \cdot (1^2 + 3^2 + 6^2 + 10^2 + 15^2 + 21^2 + 25^2 + 27^2) \;/\; 216^2 =$$
$$4332 \;/\; 46656 = 361 \;/\; 3888 \approx \mathbf{0.09285}.$$

Quesito A12 – Sequenze divisibili per 7

Risposta: 324.

Se la sequenza inizia con 3 o 5 o 6 o 7, la continuazione è unica: 3563563563 o 5635635635 o 6356356356 o 7777777777. Per ognuna delle restanti cinque cifre iniziali, invece, le continuazioni possibili sono $2^6 = 64$; infatti:

- dopo 1 e dopo 8 può esserci soltanto 4,
- dopo 4 può esserci o 2 o 9,
- dopo 2 e dopo 9 può esserci o 1 o 8,

e quindi, per formare una sequenza di 10 di queste cifre, una volta stabilita la cifra iniziale, si devono fare 6 scelte binarie.

Infine, $4 + 5 \cdot 64 =$ **324.**

Quesito A13 – Tre cerchi in un triangolo

Risposta: 3390.

Fissiamo due assi cartesiani con origine in A, in modo che la base AB del triangolo stia sull'asse delle ascisse e il punto B abbia coordinate (160, 0), e tracciamo le perpendicolari da P, C e Q alla base AB. Con riferimento alla figura alla pagina successiva, tenendo presenti le proprietà dei triangoli equilateri e delle tangenti a una circonferenza da un punto esterno, possiamo facilmente calcolare le coordinate dei tre punti P, Q e R:

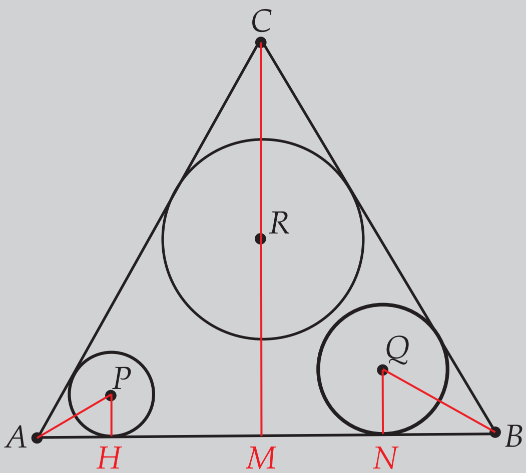
$$P\,(AH, PH) = P\,(10\cdot\sqrt{3}, 10)$$
$$Q\,(AN, QN) = Q\,(AB - BN, QN) = Q\,(160 - 20 \cdot \sqrt{3}, 20)$$
$$R\,(AM, RM) = R\,(AM, CM - CR) = R\,(80, 80 \cdot \sqrt{3} - 60)$$

e quindi le lunghezze dei segmenti PQ, QR e PR, poiché

$$PQ^2 = (160 - 30 \cdot \sqrt{3})^2 + 10^2 = 28400 - 9600 \cdot \sqrt{3}$$
$$QR^2 = (80 - 20 \cdot \sqrt{3})^2 + (80 \cdot \sqrt{3} - 80)^2 = 33200 - 16000 \cdot \sqrt{3}$$
$$PR^2 = (80 - 10 \cdot \sqrt{3})^2 + (80 \cdot \sqrt{3} - 70)^2 = 30800 - 12800 \cdot \sqrt{3}.$$

L'area del triangolo PQR può poi essere calcolata con la ***formula di Erone***,

posto $s = (PQ + QR + PR) \,/\, 2$,
come la radice quadrata di $s \cdot (s - PQ) \cdot (s - QR) \cdot (s - PR)$.



Svolgendo i calcoli, si ottiene che l'area del triangolo PQR misura circa **3390.38 cm²**.

Il procedimento poteva essere sveltito usando la funzione della calcolatrice CASIO fx-CG50 che permette di calcolare il determinante di una matrice 3 × 3. Una volta trovate le coordinate dei tre vertici P, Q e R, si compone la matrice che presenta nella riga i-esima l'ascissa dell'i-esimo vertice, la sua ordinata e il numero 1, per i = 1, 2, 3; l'area del triangolo si ottiene dividendo per 2 il valore assoluto del determinante di questa matrice.

Soluzioni della seconda selezione

16 aprile 2024

Quesito B1 – Un quadrato perfetto

Risposta: 506.
Poiché $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, per ottenere un quadrato perfetto è necessario moltiplicarlo per $2 \cdot 11 \cdot 23 =$ **506.**

Quesito B2 – Tre interi

Risposta: 546.
La risposta è data dal prodotto $13 \cdot 7 \cdot 6$.
L'equazione $a^3 - 19\,b^3 + 20\,c^3 = 0$ ammette un'infinità di soluzioni:

$$a = 13\,k,\ b = 7\,k,\ c = 6\,k, \text{ con } k \text{ intero diverso da } 0;$$

e soltanto per $k = 1$ tutti e tre gli interi a, b e c sono minori di 25.

Può essere d'aiuto il seguente programma in Python:

```
for a in range(1, 50):
    for b in range(1, 50):
        for c in range(1, 50):
            if a*a*a - 19*b*b*b + 20*c*c*c == 0:
                print(a, b, c)
```

che stampa le tre terne di numeri:

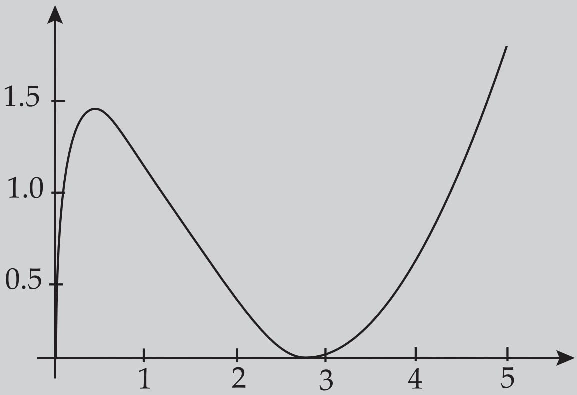
13 7 6
26 14 12
39 21 18

Per ottenere la prima terna, è sufficiente che i range delle variabili nel programma siano (1, 26).

Quesito B3 – Dove vale 1?

Risposta: 63.
La risposta è data da **(0,08 + 4,38 + 0,37 + 1,47)·10 = 63.**

1. I due valori di x cercati sono 0,08 e 4,38. Il grafico della funzione data, delineato in figura, può essere rappresentato sul display della calcolatrice grafica, e mediante il ***comando TRACE*** e muovendo il cursore con le frecce, è possibile trovare le ascisse dei punti di quota 1.



(Volendo, con la calcolatrice nella normale modalità di calcolo, potremmo verificare che $f\,(0{,}075) = 0{,}96675\ldots < 1$ e $f\,(0{,}085) = 1{,}02059\ldots > 1$; inoltre, $f\,(4{,}375) = 0{,}99088\ldots < 1$ e $f\,(4{,}385) = 1{,}002697\ldots > 1$.
Pertanto, è corretto approssimare le due ascisse richieste con 0,08 e 4,38.)

2. Le coordinate del punto di massimo relativo sono (0,37; 1,47), ed è immediato trovarle con la calcolatrice grafica, grazie al comando **G-SOLV MAX**.

Facendo i calcoli in via analitica, la derivata prima di $f\,(x)$ è

$$(1 - \ln(x))^2 + 2x \cdot (-1/x) \cdot (1 - \ln(x)) =$$
$$(1 - \ln(x)) \cdot (1 - \ln(x) - 2) =$$
$$(\ln(x) - 1) \cdot (\ln(x) + 1),$$

che si annulla per $x = e$ (dove anche $f\,(x)$ si annulla e ha un minimo) e per $x = 1/e$, che è circa 0,37; in corrispondenza di questa ascissa, $f\,(x)$ ha in effetti un massimo relativo, che vale circa 1,47.

Quesito B4 – La successione di Lucas

Risposta: 7761.
L_{25} può essere calcolato con l'ausilio del foglio elettronico o di un programma in Python, ad esempio:

```
k = input('k = ')
u = 2
v = 1
for i in range(k-1):
    w = u + v
    u = v
    v = w
    print(w)
```

Eseguendo questo programma con input 25, si ottiene:

3
4
7
11
18
29
...
64079
103682
167761

L_{25} è dunque **167761**: *un numero palindromo, composto dalle stesse cifre che compaiono sulle maglie della Banda Bassotti! (167-761 non fu mai usato dal grande* ***Carl Barks*** *nelle sue storie a fumetti, ma talvolta compare nelle storie "nostrane" dell'altrettanto grande disegnatore e sceneggiatore* ***Luciano Bottaro****.)*
Se sommiamo i termini della successione da L_0 sino a L_{23} e poi aggiungiamo 1 a tale somma, otteniamo L_{25}. Tra le proprietà di questa successione, c'è infatti questa: in generale, sommando i numeri da L_0 fino a L_k compresi, e aggiungendo 1 alla somma, si ottiene L_{k+2}, per ogni $k \in \boldsymbol{N}$: è immediato provarlo per induzione aritmetica. Questo vale anche per la successione di Fibonacci, in quanto anch'essa ha il secondo termine uguale a 1, mentre il suo primo termine non è 2 bensì 0.
La successione di Lucas ha altre caratteristiche che in qualche modo la accomunano a quella di Fibonacci: vi invitiamo a fare una istruttiva ricerca in proposito, iniziando con la consultazione di Wikipedia!

Quesito B5 – Un'equazione diofantea quadratica

Risposta: 90.
La risposta è data dalla somma **54 + 17 + 18 + 1**.
Riscriviamo l'equazione come: $(x - 3y) \cdot (x + 3y) = 315$.
Poiché $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ si può scomporre nei prodotti:

$$1 \cdot 315 = 3 \cdot 105 = 5 \cdot 63 = 7 \cdot 45 = 9 \cdot 35 = 15 \cdot 21,$$

abbiamo da controllare sei casi.
Di questi, due (e non di più) danno soluzioni intere:

- da $x - 3y = 3$ e $x + 3y = 105$
  si ricava $2x = 108$, ossia $x = 54$, e quindi $y = (54 - 3)/3 = 51/3 = 17$;
- da $x - 3y = 15$ e $x + 3y = 21$ si ricava $2x = 36$, ossia $x = 18$, e quindi $y = (18 - 15)/3 = 1$.

Pertanto, l'equazione ha due soluzioni intere positive:

$$x = 54 \text{ e } y = 17; \qquad x = 18 \text{ e } y = 1.$$

Un procedimento più rapido: notando che 9 divide x^2, e quindi 3 divide x, si può sostituire x con $3k$, semplificando così l'equazione; di conseguenza, ci saranno solo due casi da affrontare, entrambi accettabili.

Quesito B6 – La radice *n*-esima di *n*

Risposta: 3.
La radice n-esima di n è n^(1/n), avendo indicato con ^ l'elevamento a potenza.
Ma n^(1/n) = e^(ln(n^(1/n))) = e^(ln(n)/n), funzione che ha il suo massimo laddove si annulla la derivata prima rispetto a n dell'esponente ln(n)/n.
Tale derivata è (1 – ln(n)) / (n^2), che vale 0 quando ln(n) = 1, ossia quando $n = e$.
Tuttavia, quanto detto è valido per n reale positivo, mentre il quesito fa riferimento ai valori interi positivi (e soltanto fino a 100); poiché e = 2,71828…, valutiamo allora la radice quadrata di 2 (che è **1,41421356…**, come la radice quarta di 4) e la radice cubica di 3 (che è **1,44224957…**), concludendo che la più grande è quest'ultima.
Si noti che quando n tende all'infinito, ln(n) / n tende a 0, e dunque la radice n-esima di n tende a e^0 = 1.
Con la calcolatrice, provate a vedere se, graficando la funzione n^(1/n), si riesce a trovare la risposta in modo "empirico"…

Quesito B7 – Le cifre di 2024

Risposta: 2625.
Se immaginiamo di attribuire alle cifre 0, 2 e 4 i valori 0, 1 e 2, rispettivamente, i numeri cercati sono i numeri ternari da 0 a $(10121012)_3 =$

$$2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^7 = \mathbf{2624\ compresi}.$$

Quesito B8 – Guasti

Risposta: 92.
L'integrale della funzione $\exp(-t\ /\ T)$ calcolato rispetto a t, da 0 a $T/4$, è $-T \cdot \exp(-1/4) + T$; dividendo per $5T$ si ottiene $(1 - \exp(-1/4))\ /\ 5 \approx 0{,}04424$, valore che si può assumere come parametro p di una distribuzione di Bernoulli, con $n = 68$.
La probabilità richiesta è la somma delle probabilità che, nell'intervallo di tempo considerato, si guastino esattamente 0, 1, 2, 3, 4 o 5 componenti; tali probabilità sono esprimibili come

$$\mathrm{comb}(68, k) \cdot 0{,}04424^{\,k} \cdot (1 - 0{,}04424)^{\,68-k}$$

per k da 0 a 5, essendo $\mathrm{comb}(n, k) = n!\ /\ (k!\,(n-k)!)$ il numero di combinazioni di n elementi presi a gruppi di k:

0	4.61022208198e-02
1	1.45109894677e-01
2	2.25013254695e-01
3	2.29137964059e-01
4	1.72352141084e-01
5	1.02115794379e-01

La somma di questi sei termini è **0.9198312697138**, e quindi la probabilità richiesta è **circa il 92%**.

Quesito B9 – Una questione di divisibilità

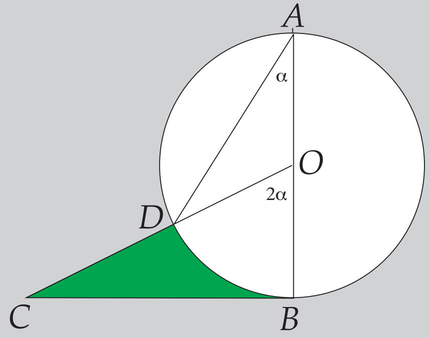
Risposta: 1680.
Se si ponesse come valore iniziale $F(0) = 1$, F sarebbe la funzione fattoriale. Si vede subito che $F(1) = 23$, $F(2) = 2 \cdot 23$, $F(3) = 3 \cdot 2 \cdot 23$, e così via, e quindi si può affermare che $F(n) = n! \cdot 23$ per ogni n intero ≥ 0.
Poiché $546480 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$, per ottenere un suo multiplo bisogna arrivare a $F(11)$ (per avere il fattore primo 11 nella scomposizione) ed è sufficiente in quanto:

$$F(11) = 11! \cdot 23 = 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 546480, \text{ sicché } F(11) \,/\, 546480 = \mathbf{1680}.$$

*La calcolatrice **CASIO fx-CG50** può essere d'aiuto nella fattorizzazione…*

Quesito B10 – Una bella proporzione!

Risposta: 1618.
Completiamo la figura, indicando con O il centro della circonferenza e con α l'angolo DAB:



Ricordiamo che il triangolo ADB è rettangolo in D, e quindi $DB \,/\, DA = \text{tg}(\alpha) > 0$. La soluzione del problema proposto è dunque l'inverso di $\text{tg}(\alpha)$, vale a dire la cotangente di α.
Ricordando anche che l'angolo al centro DOB è due volte quello alla circonferenza DAB, si ha:
$CB \,/\, OB = 2 = \text{tg}(2\alpha) =$ (per la nota *formula di duplicazione*) $2 \cdot \text{tg}(\alpha) \,/\, (1 - \text{tg}^2(\alpha))$, da cui: $\text{tg}(\alpha) = 1 - \text{tg}^2(\alpha)$, equazione di secondo grado nell'incognita $\text{tg}(\alpha)$, che ha una sola soluzione positiva: $(-1 + \sqrt{5}) \,/\, 2$.
Il rapporto cercato è il suo inverso, che vale $(1 + \sqrt{5}) \,/\, 2$: il famoso *rapporto aureo*, circa uguale a **1,618**.
Usando la calcolatrice, una volta risolto geometricamente il problema, si può calcolare $1/\tan(\tan^{-1}(2)/2)$, evitando così di ricorrere alla formula di duplicazione.

Quesito B11 – Somme di palindromi

Risposta: 979.
Si ha 2024 = 66 + 979 + 979.

- Chiaramente non può essere $C < 676$.
- Ma nemmeno $C = 676$, poiché allora $B = C$, e $A = 672$ non palindromo.
- Con $C = 686$, B potrebbe essere 686 o 676, ma in entrambi i casi A non sarebbe palindromo.
- Con $C = 696$, B potrebbe essere 696, 686, 676 o 666, e in ogni caso A non sarebbe palindromo (si noti che 696 + 676 = 686 + 686 e 686 + 666 = 676 + 676).
- Con analogo procedimento si escludono i palindromi successivi, sino a 969.
- Con $C = 969$, B potrebbe essere un palindromo compreso tra 535 e 969, ma comunque A non sarebbe palindromo.

Per ottenere tutte le 32 terne (A, B, C) con i requisiti richiesti, si può eseguire questo programma in Python:

```
def pal(num):
# restituisce 1 se n palindromo, 0 altrimenti
    s = str(num)
    n = len(s)
    if s[n-1] == '0': return 0
    for i in range(n//2):
        if s[i] != s[n-1-i]: return 0
    return 1

P = []
for i in range(1, 2024):
    if pal(i): P.append(i)
# la lista P contiene tutti i palindromi tra 1 e 2023

n = len(P)
for i in range(n):
    for j in range(i, n):
        for k in range(j, n):
            if P[i]+P[j]+P[k] == 2024: print(P[i], P[j],
P[k])
```

Proponiamo una soluzione alternativa.
Supponiamo che A, B e C siano tutti di tre cifre; indichiamo con u_A, u_B e u_C le cifre delle unità (e delle centinaia!) e con d_A, d_B e d_C le cifre delle decine di A, B e C, rispettivamente.

$$\text{Allora } 101 \cdot (u_A + u_B + u_C) + 10 \cdot (d_A + d_B + d_C) = 2024,$$
$$\text{da cui } u_A + u_B + u_C = 4 \ (mod\ 10).$$

Ma si avrebbe

$$(2024 - 10{\cdot}27) \ // \ 101 \le u_A + u_B + u_C \le 2024 \ // \ 101,$$
$$\text{ossia } 17 \le u_A + u_B + u_C \le 20 : \textbf{assurdo.}$$

Quindi A è un numero di una o di due cifre,

$$\text{e allora } 101 \cdot (u_B + u_C) + 10 \cdot (d_B + d_C) + A = 2024;$$

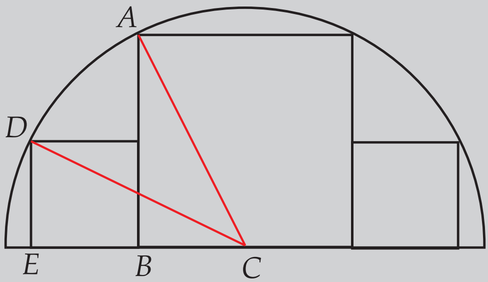
e poiché d_B e d_C sono al più 9 e A al più 99,

$$\text{abbiamo } 101 \cdot (u_B + u_C) \ge 1745,$$
$$\text{ovvero } u_B + u_C \ge 18.$$

Ma anche u_B e u_C sono al più 9, e quindi devono essere proprio uguali a 9 entrambi.
Allora si ha $10 \cdot (d_B + d_C) + A = 206$, da cui $A = 66$ (perché palindromo) e $d_B + d_C = 14$. Affinché C sia il più piccolo possibile, ma non più piccolo di B, deve essere $d_B = d_C = 7$, e quindi ***A* = 66, *B* = 979 e *C* = 979**.

Quesito B12 – Quadrati all'interno di un semicerchio

Risposta: 93.
Con riferimento alla seguente figura, e osservando le simmetrie, si ha:



$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 \ / \ 4 = (5/4) \cdot AB^2$,
da cui: $AB = 2 \cdot (\sqrt{5}/5) \cdot AC$ e $BC = (\sqrt{5}/5) \cdot AC$.
Inoltre: $AC^2 = DC^2 = DE^2 + (EB + BC)^2 = DE^2 + (DE + \sqrt{5} \cdot AC/5)^2$, da cui:

$$2 \cdot DE^2 + (2 \cdot \sqrt{5}/5) \cdot AC \cdot DE - (4/5) \cdot AC^2 = 0,$$

che fornisce una soluzione accettabile: $DE = (\sqrt{5}/5) \cdot AC$.
Dunque, il lato dei quadrati più piccoli è esattamente la metà del lato del quadrato più grande.
Poiché $AC = 416 \ / \ 2$ cm, si ottiene ***DE* ≈ 93 cm**.

Quesito B13 – Naturali notevoli

Risposta: 1050.

Si ha: $1050^2 = 1˙102˙500$, e $2˙102˙500 = 1450^2$.

Il seguente programma in Python stampa tutti i naturali notevoli con meno di cinque cifre:

```
import math
for x in range(0, 10000):
    s = str(x*x)
    y = int(str((int(s[0]) + 1) % 10) + s[1:])
    r = int(math.sqrt(y))
    if r*r == y:
        print(x, end='')
print()
```

che sono i seguenti:

0 3 24 30 45 95 105 240 300 305 450 585 950 975 985 1050 1875 2400 3000 3050 3075 3125 3375 4500 5850 9500 9625 9750 9850

Anche per questo quesito proponiamo una soluzione alternativa.

Siccome dobbiamo trovare il più piccolo n ***notevole*** di quattro cifre, supponiamo che sia $1000 \leq n < 3000$; e allora, poiché n^2 ha 7 cifre e la prima a sinistra non è 9, deve esistere un intero positivo m tale che $n^2 + 10^6 = m^2$, ossia $(m - n) \cdot (m + n) = 10^6$.

Siano x e y interi tali che $x = m - n$ e $y = m + n$, ovvero $m = (x + y)/2$ e $n = (y - x)/2$. Da $x \cdot y = 10^6$ consegue $n = (10^6 - x^2) \ / \ (2x) \geq 1000$, e dunque $x^2 + 2000x - 10^6 \leq 0$ da cui $x \leq -1000 + \sqrt{(10^6 + 10^6)} = 1000 \cdot (\sqrt{2} - 1)$, vale a dire $x \leq 414$.

Più grande è x, più piccolo è n: basta osservare il grafico della funzione

$$n = (10^6 - x^2) \ / \ (2x);$$

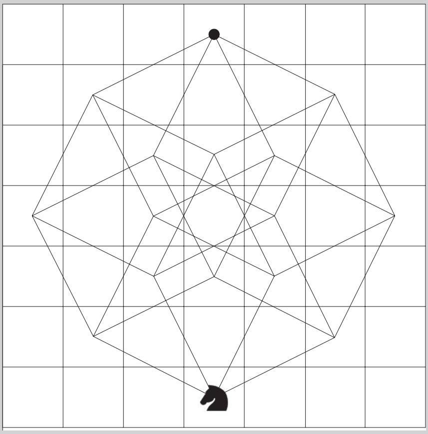
pertanto dobbiamo trovare il più grande divisore di 10^6 che sia minore o uguale a 414. È facile verificare che si tratta di 400, per cui $x = 400$, $y = 2500$ e infine $\boldsymbol{n = 1050}$.

Soluzioni della finale nazionale

6 maggio 2024

Quesito C1 – I cammini più brevi del Cavallo

Risposta: 24.
Ciascun percorso è costituito da 4 passi; le tracce dei possibili **24 (= 4!)** percorsi sono mostrate nella seguente figura: esse formano una bella proiezione piana di un ipercubo quadridimensionale.



Quesito C2 – Un quadrato palindromo

Risposta: 698.
Il numero 698896, che è uguale a 836^2, è l'unica soluzione al problema posto.
Si può verificare questa affermazione eseguendo un breve programma in Python:

```
import math
for a in range(1,10):
    for b in range(10):
        for c in range(10):
            n = a*100001 + b*10010 + c*1100
            r = int(math.sqrt(n))
            if r*r == n: print(r, '^2  =', n)
```

In output si ottiene:

836 ^ 2 = 698896

Quesito C3 – A un ballo in maschera… più frequentato!

Risposta: 74.
Analogo quesito, ma con sole tre coppie di ballerini, è stato proposto alla prima Selezione dell'edizione 2023. Indichiamo con (1, *A*), (2, *B*), (3, *C*), (4, *D*) e (5, *E*) le cinque coppie (donna, uomo) che si sono recate al ballo. Una volta che le cinque coppie si sono ricostituite casualmente, i casi possibili sono 5! = 120, le permutazioni di 5 elementi… un elenco troppo lungo per essere analizzato in poco tempo!
Come si arriva dunque alla risposta giusta? In generale, si può dimostrare che, considerata una sequenza di n elementi distinti, la probabilità di lasciare esattamente p elementi al loro posto originario, quando si esegue una permutazione in modo del tutto casuale, è data da

$$\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Questa formula è valida per ogni p da 0 a n. Nel nostro caso $n = 5$, e per rispondere alla richiesta dobbiamo sommare i risultati che si ottengono ponendo una volta $p = 0$ e un'altra volta $p = 1$.

- Ponendo dapprima $p = 0$ e ricordando che il fattoriale di 0 è 1, troviamo l'espressione

  $$1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 = (60 - 20 + 5 - 1) \ / \ 120 = 44/120.$$

  Queste sono le 44 *dismutazioni* (o *permutazioni complete*, in cui nessuno degli elementi si trova nella sua posizione originaria) di 5 elementi, e dunque la probabilità che nessuna coppia sia legittima è 44/120.
- Ponendo ora $p = 1$, dalla precedente formula ricaviamo

  $$1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 = (12 - 4 + 1)/24 = 45/120.$$

  Questi sono i casi in cui esattamente uno degli elementi si trova nella sua posizione originaria, e dunque la probabilità che una e una sola coppia sia legittima è 45/120.

Sommando le due probabilità ottenute, si ha il risultato richiesto:

$$(44 + 45) \ / \ 120 = 89/120 \approx \mathbf{0{,}74167}.$$

Una soluzione alternativa prevede di calcolare il numero di dismutazioni di 5 elementi e quello di 4 elementi mediante una formula ricorrente. In generale, il numero D (n) delle dismutazioni di n elementi può essere facilmente trovato con la formula

$$D(0) = 1,\ D(n) = (-1)^n + n \cdot D(n-1),$$

calcolabile in Python con una semplice funzione in forma iterativa:

```
def dismutazioni(n):
    d = 1
    s = 1
    for i in range(1, n+1):
        s = -s;
        d = s + i*d
    return d
```

L'applicazione di questa funzione al valore 5 restituisce 44, mentre su 4 restituisce 9. Si noti che, facendo il calcolo "a mano", quando si arriva a trovare D (5), al passo precedente si è già calcolato D (4), e pertanto si potrebbe modificare la funzione in Python facendole stampare il valore della variabile d al termine di ogni iterazione, anziché restituirne il solo valore finale.
Per completare la risposta al quesito, bisogna sommare D (5) con 5 volte D (4), immaginando di lasciare fissa una diversa coppia legittima ogni volta: $44 + 5 \cdot 9 = 89$, risultato che quindi va diviso per il numero delle permutazioni di 5 elementi, 120.

Quesito C4 – L'evoluzione di un'epidemia

Risposta: 3674.
Mediante il foglio di calcolo o con un programma in Python, ad esempio:

```
import math
def f(x, y):
    return math.exp(-x/3)*(x+1)/9 - y/3

h = 0.1
x = 0.0
y = 0.0
for i in range(1, 61):
    k1 = f(x, y)
    y += h*(k1 + f(x + h, y + h*k1))/2
    x += h
    print(x, y)
```

si ottiene la sequenza:

0.1	0.0112811354289
0.2	0.0228618176688
0.3	0.0346762177901
...	
4.9	0.366735935311
5.0	0.367198405489
5.1	0.367439391049
5.2	0.367466263289
5.3	0.367286366338
5.4	0.366907003862
5.5	0.366335426909
...	
6.0	0.360843113618

da cui si vede che il valore massimo si ha in corrispondenza di $t = 5.2$, e vale 0.3674… Dunque, trascorsi poco più di 5 mesi dall'inizio dell'epidemia, si è avuto il "picco", con quasi il 37% della popolazione ammalata.
Il metodo di integrazione numerica qui proposto è esplicito, a un passo, ed è conosciuto come ***metodo di Heun del secondo ordine*** (è un ***metodo di Runge-Kutta a 2 stadi***).
La soluzione esatta dell'equazione differenziale data è la famiglia di funzioni

$$p(t) = \exp(-t/3) \cdot (t^2 + 2t + c)/18$$

con c reale (*provatelo per esercizio*); dalla condizione iniziale $p(0) = 0$, si determina $c = 0$. La derivata prima di questa funzione (con $c = 0$), per $t > 0$, si annulla quando $t = 2 + \sqrt{10} \approx 5.162$; in tale istante $p(t)$ ha un massimo, che vale circa **0.3675**.

Quesito C5 – Un algoritmo per le frazioni egizie

Risposta: 6440.
Il procedimento descritto porta infatti a: 21/23 = 1/2 + 1/3 + 1/13 + 1/359 + 1/644046.
Come abbiamo avuto modo di illustrare nella finale dell'edizione 2023, nell'Antico Egitto le frazioni proprie erano rappresentate come somma di ***frazioni unitarie***, ossia con numeratore uguale a 1 e denominatore maggiore di 1, con i denominatori tutti ***distinti*** ed elencate in ordine decrescente, ossia per ***denominatore crescente***: da qui il nome di espressioni o rappresentazioni ***egizie***.
È garantito che, prima o poi, il procedimento che abbiamo descritto termina (e tutti i denominatori sono distinti), sebbene la dimostrazione sia dovuta non a Fibonacci bensì a J. J. Sylvester, nel 1880; si tratta di ***un algoritmo greedy*** (goloso, poiché ad ogni iterazione trova la frazione unitaria più grande possibile per giungere al completamento dello sviluppo), ma spesso porta a denominatori assai grandi negli ultimi termini.
Dalla prova di correttezza di questo algoritmo consegue che ogni frazione propria ammette almeno una rappresentazione egizia; tenendo poi presente che la generica frazione unitaria $1/n$ può essere riscritta come somma di due frazioni unitarie, una con denominatore $n + 1$ e l'altra con denominatore $n \cdot (n + 1)$, entrambi maggiori di n, si capisce facilmente che l'ultimo termine dello sviluppo (quello con denominatore maggiore) può sempre essere riscritto come somma di due nuovi termini con denominatori ancora maggiori e distinti, e dunque ogni frazione propria ammette un'infinità di rappresentazioni egizie.
Ci si può dunque prefiggere la minimizzazione del numero di termini, ossia delle frazioni unitarie sommate, o del loro più grande denominatore, ma solitamente questi due obiettivi non si raggiungono insieme; e non solo: né per l'uno né per l'altro obiettivo sono noti algoritmi ***ad hoc*** che garantiscano, in generale, il suo raggiungimento.
Per la frazione 21/23, proposta nel nostro quesito, non vi sono rappresentazioni egizie con meno di cinque termini…
Qual è quella col più piccolo denominatore massimo?

Quesito C6 – Strani numeri primi

Risposta: 1960.
Anzitutto, aggiungendo cifre 3 in testa, bisogna trovare il primo numero non primo. Occorre procedere per esaurimento, ad esempio mediante un semplice programma in Python:

```
def primo(n):    # Precondizione: n dispari >= 3
    d = 3
    while n%d != 0:
        d += 2
    return d == n

a = 30
p = 31
c = 1
while primo(p):
    a = a * 10
    p = p + a
    c += 1
print(c)
```

la cui esecuzione produce 333333331 in un tempo accettabile, nonostante l'inefficienza del codice sopra scritto… (In effetti 33331, 333331, 3333331 e 33333331 sono primi.)
Si tratta ora di scomporre il numero 333333331 nei suoi fattori primi.
Iniziando a provarne la divisibilità per 7 (la divisione dà però resto 2), per 11 (ma si vede subito, anche senza usare la calcolatrice, che la somma delle cifre di posto dispari è 13, quella delle cifre di posto pari un'unità in meno), per 13 (la divisione dà resto 6), si giunge presto al più piccolo dei fattori primi, che è 17. (Si noti che, in base ai criteri di divisibilità, un numero della forma desiderata non sarà mai divisibile né per 7, né per 11.)
A questo punto, però, bisogna avere l'accortezza di sottoporre il quoziente, che è 19607843, al test di primalità; e per numeri non eccessivamente grandi è sufficiente l'algoritmo "*ingenuo*" codificato nella funzione `primo` definita sopra (peraltro facilmente migliorabile evitando di andar oltre la radice quadrata dell'argomento, quando non si sono già trovati suoi divisori esatti). Si scopre così che 19607843 è primo, sicché 333333331 si scompone nel prodotto di due numeri primi: **17 e 19607843.**

In generale, la calcolatrice è assai utile in queste occasioni, e alcune hanno già un comando che permette di scomporre automaticamente in fattori primi un numero di non troppe cifre. Ma quando si tratta di indagare sulla primalità o meno di un qualsiasi numero "grande", diciamo di centinaia di cifre decimali, non si può certo procedere per tentativi. Un traguardo importante per questo problema fu raggiunto nel 2002 da tre matematici indiani, i quali idearono un algoritmo per decidere (con certezza) la primalità, di complessità (rispetto al tempo impiegato) polinomiale (all'incirca di sesto grado) nel numero di cifre.

Il problema della fattorizzazione (scomporre un numero nei suoi fattori primi) sembra essere intrinsecamente più difficile di quello della primalità. Si consideri, ad esempio, che soltanto nel 2004 fu calcolato un fattore (di 53 cifre decimali) di $2^{971} - 1$ (di 293 cifre decimali), che in quel momento era il più piccolo numero di Mersenne del quale non si conoscessero fattori, pur essendo nota da oltre mezzo secolo la sua non-primalità (grazie al test di Lucas-Lehmer, specifico per i numeri di Mersenne).

Dai primi anni '80 del secolo scorso, sono stati messi a punto raffinati procedimenti di fattorizzazione; nonostante certi loro ragguardevoli successi, rimane il fatto che, in generale, essi presentino una complessità computazionale assai superiore rispetto ai test di primalità. Attualmente, infatti, per il problema della fattorizzazione non sono noti algoritmi tempo-polinomiali, né tuttavia è stato provato che questo problema sia "difficile" almeno quanto i più difficili problemi della sua stessa classe: la classe, cosiddetta NP, dei problemi per i quali una risposta affermativa o l'esistenza di una soluzione sia accompagnata da una verifica tempo-polinomiale della sua correttezza; ad esempio, per il test di non-primalità (il complemento del test di primalità), quando il numero dato non è primo si deve esibire almeno una coppia di numeri, entrambi maggiori di 1, moltiplicando i quali (cosa che si può fare in tempo-polinomiale) si deve ottenere il numero dato.

Quesito C7 – Equazioni di terzo grado

Risposta: 38.
In generale, possiamo scrivere:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = a \cdot (x - X) \cdot (x - Y) \cdot (x - Z) =$$
$$a \cdot (x^3 - (X + Y + Z) \cdot x^2 + (XY + XZ + YZ) \cdot x - XYZ)$$

da cui, identificando i polinomi:

$$X + Y + Z = - b / a, \quad XY + XZ + YZ = c / a, \quad XYZ = - d / a.$$

Poiché X, Y e Z sono radici dell'equazione, abbiamo:

$$a \cdot X^3 + b \cdot X^2 + c \cdot X + d = 0,$$
$$a \cdot Y^3 + b \cdot Y^2 + c \cdot Y + d = 0,$$
$$a \cdot Z^3 + b \cdot Z^2 + c \cdot Z + d = 0,$$

e quindi:

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = (- b / a) \cdot (X^2 + Y^2 + Z^2) - (c / a) \cdot (X + Y + Z) - 3 \cdot d / a$$

e siccome $X^2 + Y^2 + Z^2 = (X + Y + Z)^2 - 2 \cdot (XY + XZ + YZ)$ otteniamo:

$$X^3 + Y^3 + Z^3 =$$
$$(- b / a)\cdot(X + Y + Z)^2 + 2\cdot(b / a)\cdot(XY + XZ + YZ) - (c / a)\cdot(X + Y + Z) - 3\cdot d / a =$$
$$(- b / a)\cdot(- b / a)^2 + 2\cdot(b / a)\cdot(c / a) - (c / a)\cdot(- b / a) - 3\cdot d / a =$$
$$- b^3 / a^3 + 3bc / a^2 - 3d / a = (- b^3 + 3abc - 3a^2d) / a^3.$$

Nel caso in esame, abbiamo infine $X^3 + Y^3 + Z^3 = (1000 - 420 - 276)/8 = 38$.

Naturalmente, nel caso specifico, usando la calcolatrice CASIO fx-CG50 (in Complex Mode: a + bi), avremmo potuto risolvere l'equazione di terzo grado

$$2x^3 - 10x^2 + 7x + 23 = 0,$$

ricavando le tre radici:

– 1.114737675,
3.057368837 + 0.9842887027i,
3.057368837 – 0.9842887027i.

Sommandone i cubi, la calcolatrice fornisce il valore approssimato 37.99999998.

Quesito C8 – Una trasformazione sul piano

Risposta: 4157.
Il quesito può essere risolto mediante il foglio elettronico oppure con un programma in Python, ad esempio:

```
import math
x = X = -0.4
y = Y = 0.4
for n in range(17):
    xq = x*x - y*y
    yq = 2.0*x*y
    x = xq + X
    y = yq + Y
print(math.sqrt(x*x + y*y))
```

la cui esecuzione fornisce:

0.415704773012

Supponiamo di partire da un punto (X, Y) appartenente al cerchio di raggio 2 centrato nell'origine del piano, circonferenza compresa; il punto iniziale proposto nel quesito è tra questi. Se, iterando la trasformazione, nessuno dei punti p_n esce dal cerchio, allora (X, Y) appartiene al famoso insieme di Mandelbrot. Se un punto p_n esce dal cerchio, tutti i successivi se ne allontaneranno sempre più. L'unico punto della circonferenza che appartiene all'insieme di Mandelbrot è (–2, 0); tutte le sue successive trasformazioni coincidono col punto (2, 0). Di questo insieme si vedono spesso rappresentazioni – ovviamente approssimate – in meravigliose immagini a colori. Di solito, i punti presumibilmente appartenenti all'insieme di Mandelbrot sono in nero, gli altri – certamente non appartenenti a tale insieme – sono variamente colorati proprio a seconda del numero di iterazioni che precedono l'uscita dal cerchio della loro prima trasformazione distante più di due unità dall'origine del piano. Il punto (– 0.4, 0.4) proposto nel quesito appartiene all'insieme di Mandelbrot: iterando la trasformazione all'infinito, tutti i punti p_n stanno dentro al cerchio di raggio 2.
Fu il matematico di origine polacca Benoît B. Mandelbrot ad avviare lo studio di questo oggetto dalle tante interessanti proprietà. Nel 1975, egli coniò il termine frattale, da attribuire non soltanto a tutti quegli oggetti che hanno una dimensione non intera (come la "curva" che delimita il fiocco di neve di von Koch), ma anche a quelli che hanno una dimensione intera "insolita" (come la curva di Peano, che riempiendo un quadrato ha dimensione 2). Per inciso, anche la frontiera – vale a

dire il "contorno" – dell'insieme di Mandelbrot (che è un insieme connesso, cioè "costituito da un solo pezzo") è un frattale di dimensione 2, assai complicato, la cui analisi è stata possibile soltanto con l'aiuto del computer.
Vi consigliamo di fare una ricerca in rete su questi argomenti, che da oltre un secolo costituiscono un affascinante campo di ricerca per i matematici, con importanti ricadute applicative.

Quesito C9 – Due successioni di numeri reali

Risposta: 1842.
In generale, per $n > 0$, u_n e v_n si possono così esprimere:

- $u_n = a \cdot (b\text{^}1/2) \cdot (a\text{^}1/4) \cdot (b\text{^}1/8) \cdot \ldots \cdot (b\text{^}1/2^n) =$
  $a\text{^}(1 + 1/4 + \ldots + 1/2^{n-1}) \cdot b\text{^}(1/2 + 1/8 + \ldots + 1/2^n)$,
  $v_n = b \cdot (a\text{^}1/2) \cdot (b\text{^}1/4) \cdot (a\text{^}1/8) \cdot \ldots \cdot (a\text{^}1/2^n) =$
  $b\text{^}(1 + 1/4 + \ldots + 1/2^{n-1}) \cdot a\text{^}(1/2 + 1/8 + \ldots + 1/2^n)$,

se n è dispari;

- $u_n = a \cdot (b\text{^}1/2) \cdot (a\text{^}1/4) \cdot (b\text{^}1/8) \cdot \ldots \cdot (a\text{^}1/2^n) =$
  $a\text{^}(1 + 1/4 + \ldots + 1/2^n) \cdot b\text{^}(1/2 + 1/8 + \ldots + 1/2^{n-1})$,
  $v_n = b \cdot (a\text{^}1/2) \cdot (b\text{^}1/4) \cdot (a\text{^}1/8) \cdot \ldots \cdot (b\text{^}1/2^n) =$
  $b\text{^}(1 + 1/4 + \ldots + 1/2^n) \cdot a\text{^}(1/2 + 1/8 + \ldots + 1/2^{n-1})$,

se n è pari.

Quindi il rapporto $u_n \,/\, v_n$ equivale a:

$(a \,/\, b)$ ^ $(1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + \ldots + 1/2^{n-1} - 1/2^n)$, se n è dispari;
$(a \,/\, b)$ ^ $(1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + \ldots - 1/2^{n-1} + 1/2^n)$, se n è pari.

Per n tendente a infinito, l'esponente di $(a \,/\, b)$ è la somma della serie con termine $1/2^{2n+1} = (1/2) \cdot (1/4^n)$, a partire da $n = 0$; tale somma è

$$(1/2) \,/\, (1 - 1/4) = (1/2) \cdot (4/3) = 2/3.$$

Nel caso in esame, $(5 \,/\, 2)$ ^ $(2 \,/\, 3) \approx$ **1.8420157**.

Procedendo per via "sperimentale", si può usare il foglio elettronico oppure scrivere un programma in Python; ad esempio:

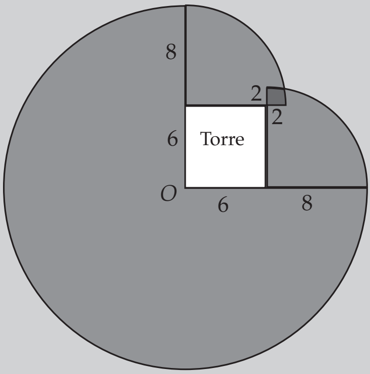
```
import math
a = u = 5.0
b = v = 2.0
print(u, v, u/v)
for k in range(42):
    nu = a * math.sqrt(v)
    v = b * math.sqrt(u)
    u = nu
    print(u, v, u/v)
```

Eseguendo questo programma, otteniamo infatti:

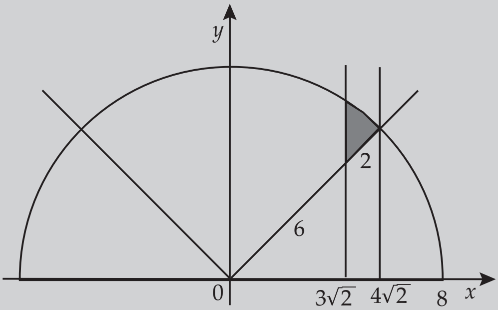
5.0	*2.0*	*2.5*
7.07106781187	*4.472135955*	*1.58113883008*
10.5737126344	*5.31829589694*	*1.98817682192*
11.5307153908	*6.50344912624*	*1.77301539029*
12.750930482	*6.79138141789*	*1.87751647233*
13.0301395022	*7.14168901086*	*1.82451790919*
13.3619693635	*7.21945690539*	*1.85082749833*
...		
13.572088083	*7.36806299728*	*1.84201574932*
13.572088083	*7.36806299728*	*1.84201574932*

Quesito C10 – Il cane da guardia

Risposta: 5586.
Con riferimento alla seguente figura, dove s'immagina la catena fissata all'angolo indicato con O, la superficie richiesta è colorata in grigio; tuttavia, la parte in grigio più scuro va computata una sola volta, e qui sta, in effetti, la difficoltà del quesito proposto…



Per tale computo, si può fissare un riferimento cartesiano con centro nell'angolo in alto a sinistra della torre e asse x orientato verso l'angolo in basso a destra della torre stessa. Per simmetria, l'area in grigio più scuro è il doppio dell'area evidenziata in grigio nel diagramma che segue.



Quest'ultima è data dall'integrale in dx della differenza tra le due funzioni $y = \sqrt{(8^2 - x^2)}$ e $y = x$, che risulta (a meno di una costante)

$$(8^2 \cdot \arcsin(x/8) + x\sqrt{(8^2 - x^2)})\ /2 - x^2/2,$$

calcolato da $x = 3\sqrt{2}$ a $x = 4\sqrt{2}$, ovvero:

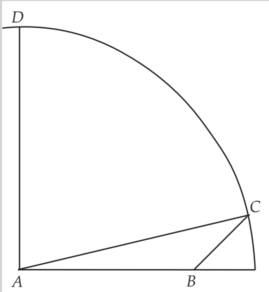
$$8\pi - 32 \cdot \arcsin((3\sqrt{2})/8) - 3\sqrt{23} + 9 \approx 1.85757,$$

il cui doppio è 3.71514.

Naturalmente, usando la calcolatrice grafica, il valore dell'integrale può essere trovato in modo diretto, senza risalire alle primitive, impostando soltanto la funzione da integrare (differenza tra le due suddette) e gli estremi dell'intervallo di integrazione.
Fatto questo, è facile calcolare l'area richiesta, che espressa in metri quadrati risulta:

$$14^2 \cdot 3\pi/4 + 2 \cdot 8^2\pi/4 - 3.71514 \approx \mathbf{558.62994.}$$

Allo stesso risultato si può giungere per via geometrica, senza dover calcolare integrali.



Nella figura qui sopra, AB è il lato orizzontale in alto della torre, mentre C è il punto di intersezione dei due quarti di circonferenza di raggio 8 metri. Dunque, per rispondere alla richiesta, all'area dei tre quarti del cerchio di raggio 14 metri, devono essere aggiunte due volte (per simmetria) le aree del triangolo ABC e del settore circolare CAD. Sono noti AB = 6 m, AC = AD = 8 m e, per simmetria, l'angolo ABC di 3π/4 radianti. Considerando il triangolo ABC, il teorema dei seni dà

$$AB : \sin(ACB) = AC : \sin(ABC),$$

da cui $\sin(ACB) = (3\sqrt{2})/8$ *e quindi l'angolo ACB è l'*$\arcsin((3\sqrt{2})/8)$*, mentre l'angolo BAC è* $\pi - 3\pi/4 - \arcsin((3\sqrt{2})/8)$.
Allora l'area del triangolo ABC può essere calcolata come

$$AB \cdot AC \cdot \sin(BAC) / 2 = 6 \cdot 8 \cdot \sin(\pi/4 - \arcsin((3\sqrt{2})/8)) / 2 \ m^2 \approx 5.3875 \ m^2.$$

L'area del settore circolare CAD è data dall'angolo CAD (in radianti) moltiplicato per il quadrato del raggio e diviso per 2, ossia

$$32 \cdot (\pi/2 - \pi/4 + \arcsin((3\sqrt{2})/8)) \ m^2 \approx 43.0204 \ m^2.$$

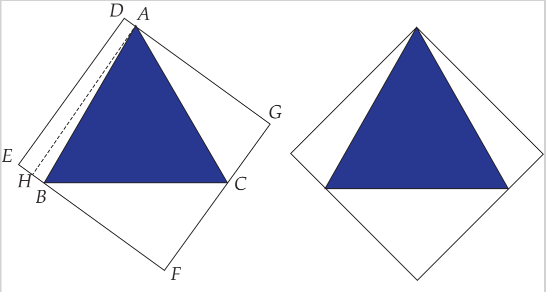
L'area richiesta, espressa sempre in metri quadrati, risulta

$$14^2 \cdot 3\pi/4 + 2 \cdot (5.3875 + 43.0204) \approx 558.62992.$$

Quesito C11 – Un quadrato attorno al triangolo

Risposta: 680.

Supponiamo di disegnare il quadrato in modo tale che i tre vertici del triangolo appartengano a tre lati del quadrato, come rappresentato nella figura a sinistra.



Nota la lunghezza di AB (= AC = BC = 27 cm), indichiamo con x la lunghezza del lato del quadrato, che è la nostra incognita: il suo quadrato, infatti, sarà la risposta al quesito. Tracciamo dal vertice A del triangolo la perpendicolare AH al lato EF del quadrato; quindi, $AH = DE = x$.
Dal teorema di Pitagora abbiamo:

$$HB^2 = AB^2 - x^2$$

$$FC^2 = BC^2 - (x - EH - HB)^2, \text{ ossia } FC^2 = AB^2 - (x - EH - HB)^2 =$$

$$AB^2 - (x - EH)^2 - HB^2 + 2 \cdot (x - EH) \cdot HB =$$

$$\text{(per la precedente equazione) } x^2 - (x - EH)^2 + 2 \cdot (x - EH) \cdot HB;$$

$$CG^2 + AG^2 = AC^2, \text{ ossia } (x - FC)^2 + (x - EH)^2 = AB^2,$$

$$\text{da cui: } FC^2 = 2 \cdot x \cdot FC - x^2 + AB^2 - (x - EH)^2,$$

e uguagliando le due espressioni di FC^2 otteniamo:

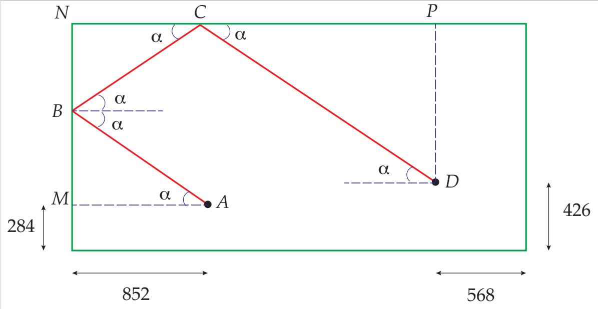
$$x \cdot (x - FC) + (x - EH) \cdot HB = AB^2/2, \text{ e infine:}$$

$$x \cdot \sqrt{(AB^2 - (x - EH)^2)} + (x - EH) \cdot \sqrt{(AB^2 - x^2)} = AB^2/2.$$

A primo membro c'è la somma (costante) di due termini, l'uno dei quali si ottiene dall'altro scambiando x e $(x - EH)$, e quindi il minimo per x si ha quando $EH = 0$, sicché i due termini risultano uguali, e il vertice D del quadrato va a coincidere con il vertice A del triangolo. Ma allora la figura deve essere simmetrica, come appare a destra, e quindi $BF = FC = x - HB$ e $(x - HB)^2 = AB^2/2$, ma anche $HB^2 + x^2 = AB^2 = 2 \cdot (x - HB)^2$, da cui: $HB^2 - 4 \cdot x \cdot HB + x^2 = 0$.
La soluzione positiva di questa equazione è $HB = (2 - \sqrt{3}) \cdot x$, e quindi: $\sqrt{2} \cdot (x - (2 - \sqrt{3}) \cdot x) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot x = AB = 27$ cm, da cui $x^2 \approx$ **680.17 cm²**.

Quesito C12 – Due sponde

Risposta: 103.
Con riferimento alla seguente figura, e indicando la lunghezza di un segmento con i suoi estremi, si ha:



$$AB = 852 \ / \ \cos\alpha \quad (1);$$

$$BN = BC \sin\alpha = 1420 - 284 - BM = 1136 - AB \sin\alpha,$$

da cui: $AB + BC = 1136 \ / \ \sin\alpha \quad (2);$

$$PD = CD \sin\alpha = 1420 - 426 = 994,$$

da cui: $CD = 994 \ / \ \sin\alpha \quad (3);$

$$BC \cos\alpha + CD \cos\alpha = 2840 - 568 = 2272,$$

da cui: $BC + CD = 2272 \ / \ \cos\alpha \quad (4).$

Dalla (2) e dalla (1) si ricava: $BC = 1136 \ / \ \sin\alpha - 852 \ / \ \cos\alpha,$

mentre dalla (4) e dalla (3) si ha: $BC = 2272 \ / \ \cos\alpha - 994 \ / \ \sin\alpha,$
e dunque:

$$1136 \cos\alpha - 852 \sin\alpha = 2272 \sin\alpha - 994 \cos\alpha,$$

$$\text{ossia} \quad 2130 \cos\alpha = 3124 \sin\alpha,$$

da cui: $\alpha = \operatorname{atan}(2130 \ / \ 3124),$
e infine, dalla (1), $AB = 852 \ / \ \cos(\operatorname{atan}(2130 \ / \ 3124)) \approx 1031.2,$
corrispondente a **circa 103 centimetri.**

Inoltre, dalla (2), $BC = 1136 \ / \ \sin(\operatorname{atan}(2130 \ / \ 3124)) - AB \approx 985.4;$
dalla (3), $CD = 994 \ / \ \sin(\operatorname{atan}(2130 \ / \ 3124)) \approx 1764.5,$
e quindi: $AB + BC + CD \approx 3781.1.$
Per ulteriore verifica, in base alla (1) e alla (4):

$$AB + BC + CD = (852 + 2272) \ / \ \cos(\operatorname{atan}(2130 \ / \ 3124)) \approx 3781.$$

Vediamo un procedimento alternativo che, evitando la trigonometria, sfrutta soltanto le similitudini fra i triangoli rettangoli NCB, PCD e MAB, e infine il teorema di Pitagora. Esprimendo tutte le lunghezze in millimetri, ricaviamo:

$$PD = 1420 - 426 = 994$$
$$NC + CP = 2840 - 568 = 2272$$
$$NB + BM = 1420 - 284 = 1136$$
$$NC / CP = NB / PD = NB / 994$$
$$NB / BM = NC / MA = NC / 852$$

Dobbiamo quindi risolvere un sistema (non lineare) di quattro equazioni

(1) $NC + CP = 2272$
(2) $NB + BM = 1136$
(3) $NC / CP = NB / 994$
(4) $NB / BM = NC / 852$

nelle quattro incognite NC, CP, NB, BM. (La calcolatrice grafica potrebbe essere d'aiuto per risolvere graficamente soltanto certi sistemi non lineari di due equazioni in due incognite…)

Dalla (4), $BM = 852 \cdot (NB / NC) =$

$852 \cdot (994 / CP)$ per la (3);

dalla (2), $NB = 1136 - BM$,

e quindi $NB = 1136 - 852 \cdot (994 / CP)$;

dalla (3), $NC = NB \cdot CP / 994$,

e quindi $NC = (1136 - 852 \cdot (994 / CP)) \cdot CP / 994$;

infine, sostituendo questa espressione di NC nella (1), ricaviamo:

$$1136 \cdot CP - 852 \cdot 994 + 994 \cdot CP = 994 \cdot 2272,$$

da cui $CP \approx 1457.87$, e $NC \approx 814.13$,

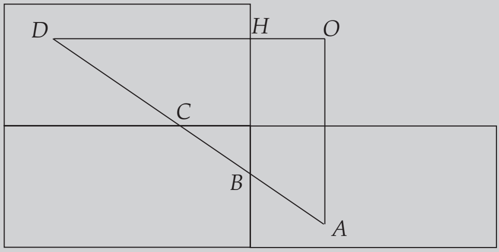
e quindi, dalla (3), $NB = 994 \cdot NC / CP \approx 555.09$

e poi, dalla (2), $BM = 1136 - NB \approx 580.91$.

(Si noti che questa è la soluzione del sistema vincolando tutte le quattro variabili ad assumere valori positivi, altrimenti vi sarebbe anche un'altra soluzione: $NC = NB = 0$, $CP = 2272$, $BM = 1136$.)

Sulla scorta del valore ricavato per BM, applicando il teorema di Pitagora al triangolo MAB, otteniamo:
$AB = \sqrt{BM^2 + MA^2} \approx \sqrt{580.91^2 + 852^2} \approx$ **1031.2.**

Ma c'è un metodo ancora più semplice per risolvere problemi di questo genere, ricorrendo a un piccolo "trucco": se ribaltiamo simmetricamente due volte il piano, otteniamo la seguente figura.



Con i dati del testo, si calcolano subito (in millimetri)

$$AO = 2 \cdot 1420 - 284 - 426 = 2130 \text{ e } OD = 852 + 2840 - 568 = 3124,$$

e quindi dal teorema di Pitagora

$$AD = \sqrt{(2130^2 + 3124^2)}.$$

Inoltre, $HD = 2840 - 568 = 2272$.
Dalla similitudine dei triangoli AOD e BHD si ricava

$$BH = AO \cdot HD / OD = 2130 \cdot 2272 / 3124 = 17040 / 11,$$

e applicando nuovamente il teorema di Pitagora

$$BD = \sqrt{(2272^2 + (17040 / 11)^2)}.$$

*Infine, AB si ottiene come differenza tra AD e BD, che, una volta calcolate le due radici quadrate, risulta approssimata da 1032, ovvero **103 centimetri**.*

Quesito C13 – Sembra facile…

Risposta: 42.
Si tratta di un'istanza di un problema divenuto famoso e noto come "*le scale che s'incrociano*": due scale di lunghezza nota appoggiano in basso ai lati di un vicolo e in alto al muro opposto; si conosce la quota del punto in cui s'incrociano: quant'è largo il vicolo?
L'edizione inglese di Wikipedia gli dedica una voce:

https://en.wikipedia.org/wiki/Crossed_ladders_problem

spiegandolo in generale. Raccomandiamo la lettura di questa pagina, che riporta o rimanda a diversi procedimenti risolutivi, più o meno eleganti. Comunque sia, questo problema può essere risolto, sebbene in modo alquanto laborioso, servendosi soltanto delle proprietà dei segmenti staccati da rette parallele, o delle similitudini tra triangoli rettangoli, e del teorema di Pitagora. Indichiamo con H la proiezione del punto D sull'asse delle ascisse e vediamo come giungere a un'equazione in una sola incognita, ad esempio la lunghezza AD (questa, tuttavia, non si rivelerà la scelta più felice). Si ha:

$$AD^2 - AH^2 = DH^2,$$

dove DH è noto (1);

$$AH : HO = AD : DB = AD : (AB - AD),$$

dove AB è noto, da cui:

$$AH^2 = HO^2 \cdot AD^2 \;/\; (AB - AD)^2 \text{ (2);}$$

$$HO^2 = OD^2 - DH^2 \text{ (3);}$$

infine, dalla similitudine dei triangoli ADC e BDO si ricava:

$$OD : DC = DB : AD,$$

ossia $OD : (OC - OD) = (AB - AD) : AD$,

da cui, dopo semplici passaggi, si ha:

$$OD = OC \cdot (1 - AD/AB),$$

dove OC e AB sono noti (4).
Elevando al quadrato entrambi i membri della (4), si ottiene l'espressione di OD^2 da sostituire nella (3); l'espressione di HO^2 così ottenuta può essere sostituita nella (2) e questa a sua volta nella (1), sicché, dopo tali passaggi, rimane un'equazione nella sola incognita AD:

$$(q \;/\; AB^2) \cdot AD^4 - (2q \;/\; AB) \cdot AD^3 + q \cdot AD^2 - 2 \cdot AB \cdot DH^2 \cdot AD + AB^2 \cdot DH^2 = 0$$

avendo posto $q = OC^2 - AB^2$.
Se si assume come incognita OD, con procedimento del tutto analogo si ricava:

$$(q \;/\; OC^2) \cdot OD^4 - (2q \;/\; OC) \cdot OD^3 + q \cdot OD^2 + 2 \cdot OC \cdot DH^2 \cdot OD - OC^2 \cdot DH^2 = 0.$$

Sono entrambe equazioni di quarto grado, da risolvere numericamente per trovare le soluzioni accettabili (di solito approssimate). Nel caso del problema proposto, abbiamo $q = 7024.64$ e la prima di queste due equazioni diventa:

$$1.4336 \cdot AD^4 - 200.704 \cdot AD^3 + 7024.64 \cdot AD^2 - 181440 \cdot AD + 6350400 = 0 \quad (5).$$

Una sua soluzione esatta, che è quella che soddisfa la richiesta, è

$$AD = 45,$$

per cui, applicando il teorema di Pitagora,

$$AH = \sqrt{(AD^2 - DH^2)} = \sqrt{(45^2 - 36^2)} = \sqrt{729} = 27.$$

A questo punto, evitando di ricorrere all'altra equazione di quarto grado, si sfrutta la proporzione

$$AD : DB = AH : HO,$$

ottenendo $HO = DB \cdot AH \ / \ AD =$

$$(AB - AD) \cdot AH \ / \ AD = 25 \cdot 27 \ / \ 45 = 15,$$

e infine $OA = AH + HO = 27 + 15 = 42$.

Il punto dolente è la risoluzione dell'equazione di quarto grado: se infatti calcoliamo il valore del polinomio a primo membro della (5) con AD = 44.9 o 45.1 otteniamo valori assai lontani da 0: circa 24569 o –24622, rispettivamente (osserviamo il sensibile aumento dei coefficienti al diminuire dell'esponente dell'incognita AD); ciò può costituire un problema se il metodo numerico non adotta un adeguato test di convergenza.

Le cose non migliorano nemmeno seguendo il suggerimento di Wikipedia: lo stesso fenomeno si ripresenta, forse in modo ancor più evidente, sebbene il procedimento risolutivo sia più rapido: vediamolo.

Anziché AD, assumiamo come incognita OB, e sempre sfruttando similitudini di triangoli rettangoli scriviamo:

$$OA : OB = AH : DH \text{ e } OA : AC = HO : DH,$$

da cui, sommando membro a membro:

$$OA \cdot (1/OB + 1/AC) = (AH + HO) / DH = OA/DH,$$

e quindi: $1/OB + 1/AC = 1/DH$, ***da cui si può ricavare:***

$$AC = DH \cdot OB / (OB - DH).$$

Per il teorema di Pitagora:

$$OA^2 = OC^2 - AC^2 = AB^2 - OB^2,$$

da cui $OB^2 = AC^2 + AB^2 - OC^2$,

e sostituendovi l'espressione di AC testé ricavata, dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$OB^4 - 2 \cdot DH \cdot OB^3 + q \cdot OB^2 - 2q \cdot DH \cdot OB + q \cdot DH^2 = 0$$

ancora con $q = OC^2 - AB^2$.

In alternativa, con analogo procedimento, si può ricavare l'equazione nell'incognita AC:

$$AC^4 - 2 \cdot DH \cdot AC^3 - q \cdot AC^2 + 2q \cdot DH \cdot AC - q \cdot DH^2 = 0.$$

Basta risolvere una di queste due equazioni, e poi applicare ancora il teorema di Pitagora per ricavare OA.

Nel nostro caso abbiamo, dalla prima:

$$OB^4 - 72 \cdot OB^3 + 7024.64 \cdot OB^2 - 505774.08 \cdot OB + 9103933.44 = 0 \quad (6)$$

che ha una soluzione esatta $OB = 56$,
da cui $OA = \sqrt{(70^2 - 56^2)} = \sqrt{1764} = 42$.
Ma in corrispondenza di $OB = 55.9$ o 56.1, il polinomio a primo membro assume valori vieppiù lontani da 0: circa –30470 o 30745, rispettivamente. Ovviamente, se scaliamo a un decimo le misure, l'equazione diventa:

$$OB^4 - 7.2 \cdot OB^3 + 70.2464 \cdot OB^2 - 505.77408 \cdot OB + 910.393344 = 0$$

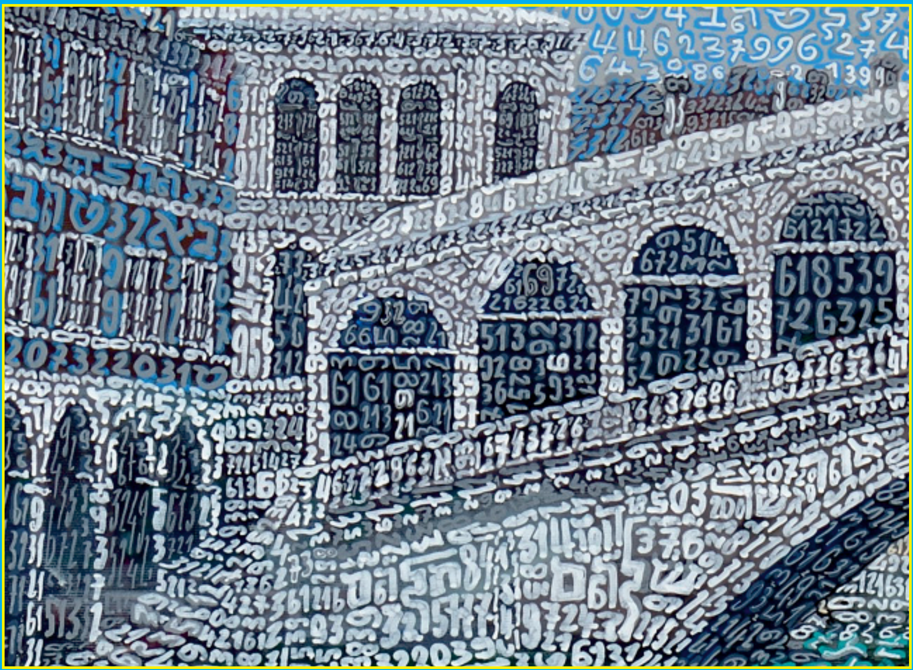
che fornisce precisamente $OB = 5.6$; tuttavia, ponendo $OB = 5.59$ o 5.61, il polinomio a primo membro assume valori circa –3.047 o 3.0745, rispettivamente: il suddetto problema rimane.

Per fortuna, la calcolatrice CASIO fx-CG50 è in grado di risolvere immediatamente equazioni di questo tipo senza alcuna difficoltà! Usando il menù Equazioni Algebriche (in forma di polinomio uguagliato a zero) e impostando i cinque coefficienti, per l'equazione (5) la calcolatrice fornisce due soluzioni reali: una approssimata con dieci cifre significative, 98.76352445, non accettabile come lunghezza di AD (che deve essere minore di 70), e una intera, 45, che è quella che ci interessa per il nostro quesito. In corrispondenza della prima soluzione, il polinomio assume in effetti un valore prossimo allo zero, circa 0.002678. Anche per l'equazione (6) la calcolatrice trova subito le due soluzioni reali: 56 (accettabile) e 25.51549283 (non accettabile, poiché OB deve essere maggiore di 36; in corrispondenza di questa, il polinomio vale circa 0.000247).

Note

Note

Finito di stampare
nel mese di aprile 2024
per conto di
Associazione Culturale Kangourou Italia
presso ***Arti Grafiche Bianca & Volta***
via del Santuario 2
Truccazzano (MI)



Edizioni Kangourou
Italia