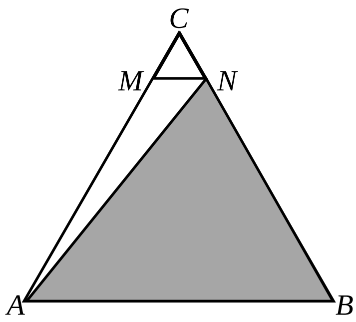
Semifinale individuale Cadet

Quesiti a risposta chiusa

1. (Punti 2) Nel piano sono tracciate 2024 circonferenze tutte distinte tra loro. Quanti potrebbero essere al massimo i punti comuni a tutte le circonferenze?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 1012

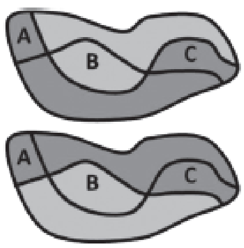
Risposta: C). Soluzione. Per due punti passano infinite circonferenze complanari (ogni punto dell'asse del segmento che li ha come estremi è centro di una di esse), per tre punti ne passa una sola.



2. (Punti 3) Il triangolo *ABC* in figura è equilatero, con il lato lungo 12 cm. Il segmento *MN* è parallelo al lato *AB*, mentre il segmento *AM* è lungo 10 cm. Di quanti centimetri quadrati è l'area del triangolo *ANC*?

A) 36 B) $30\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$ E) 10

Risposta: D). Sol. L'altezza del triangolo *ABC* è $12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm e coincide con quella del triangolo *ANC* rispetto alla base *CN*, che è lunga 2 cm.



3. (Punti 3) Le due immagini mostrano lo stesso parco ripartito in 5 zone; le lettere presenti in tre delle zone ne indicano l'area. Nel parco abitano due canguri: uno è solito pascolare nella parte più chiara della prima immagine, l'altro in quella più chiara della seconda. Le due parti si sovrappongono parzialmente. In questo modo, entrambi i canguri hanno a disposizione esattamente metà dell'area del parco. Quale delle seguenti uguaglianze è certamente vera?

A) $A = C$ B) $B = A + C$ C) $B = (A + C)/2$ D) $B = 2(A + C)/3$ E) $B = 3(A + C)/5$

Risposta B). Sol. Dette *D* e *E* le aree delle zone per le quali non sono indicate lettere, deve essere $B + D = A + E + C = B + E$ (ogni canguro ha a disposizione metà del parco). Dalla seconda uguaglianza segue che è comunque vera B). È banale trovare esempi nei quali A) è falsa.

4. (Punti 4) Sofia ha in mente due numeri interi positivi minori di 20 che differiscono per più di 2. Ne moltiplica uno per 5, somma l'altro al prodotto che ha ottenuto e raddoppia il risultato: ottiene così 212. Qual è la somma dei due numeri che aveva in mente?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Risposta: E). Sol. Se x e y sono i due numeri, deve essere $5x + y = 106$. Osserviamo che x e y non possono superare 19. Se $x = 19$ risulta $y = 11$ che è accettabile; invece $x = 18$ comporterebbe $y = 16$, non accettabile. Ovviamente se $x \leq 17$ il valore di y diventa non minore di 21 e a maggior ragione il risultato è inaccettabile.

5. (Punti 4) Nella parola *KANGAROO* ogni lettera rappresenta una cifra: lettere uguali cifre uguali, lettere diverse cifre diverse. Il numero di 8 cifre rappresentato è divisibile per 11. Conservando la medesima legge di rappresentazione, quale delle seguenti parole rappresenta certamente un numero anch'esso divisibile per 11?

A) *RANG* B) *NGAR* C) *KANGO* D) *RKGN* E) *RKNG*

Risposta D). Soluzione. Il criterio di divisibilità per 11 chiede che la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari sia divisibile per 11. Si ha dunque che $K + N + A + O - (A + G + R + O)$ è divisibile per 11, quindi anche $K + N - (G + R)$ è divisibile per 11. Allora lo è *RKGN*, mentre i numeri rappresentati dalle altre parole potrebbero non esserlo.

6. (Punti 4) La rappresentazione decimale del numero intero N ha la forma 20230…0, dove le cifre non indicate sono tutte 0. Si sa che lo 0,0002024 % di N è maggiore di 2025. Quante cifre deve avere N al minimo?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

Risposta: D). Soluzione. L'intero positivo k deve essere tale che $2023 \times 10^k \times 2024 / 10^{7+2} > 2025$: si deve dunque avere $k \geq 6$.

7. (Punti 5) Considera l'allineamento di cifre

202420242024…20242024

dove la quaterna ordinata 2024 compare 1.012 volte. Ogni blocco che sia formato da un qualunque numero di cifre consecutive in questo allineamento e non incominci con 0 individua un numero intero (ad esempio il blocco 4202420, che parte dalla quarta cifra e termina con la decima oppure dall'ottava e termina con la quattordicesima e così via, individua il numero 4.202.420). Quanti numeri interi tutti diversi tra loro, determinati da blocchi ammissibili, risultano divisibili per 4?

A) 2021 B) 2024 C) 2025 D) 6067 E) 6070

Risposta: E). Soluzione. Tutti e soli i numeri che ci interessano non possono terminare con 2 (infatti nessun numero di almeno tre cifre che termini con 02 o 42 è divisibile per 4), ma possono terminare con 0 (cioè, per noi, con 20) o con 4. Ogni blocco accettabile che termini con 0 deve iniziare con 20 o con 2420 o con 420 e può essere seguito da una quantità di 2420 consecutivi che varia da 0 a 1.011 per 20 e da 0 a 1.010 per 2420 e 420, per un totale di 3.034 possibilità. Ogni blocco accettabile che termini con 4 deve iniziare con 2024 o con 24 o con 4 e le possibilità sono 1.012 in ciascun caso, per un totale di 3.036.

8. (Punti 5) Ad una festa presso l'ambasciata italiana sono stati invitati alcuni spagnoli e alcuni francesi, più di uno per ciascuna nazionalità e anche gli italiani presenti sono più di uno. Ogni italiano dà il benvenuto una e una sola volta a ogni invitato straniero con una stretta di mano e non vi sono altre strette di mano: alla fine, le strette di mano sono complessivamente 143. Quanti potrebbero essere, al massimo, gli spagnoli invitati?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Risposta: E). Soluzione. Il numero di strette di mano è il prodotto del numero degli italiani con la somma del numero degli spagnoli e del numero dei francesi. Volendo esprimere 143 come prodotto di interi ci sono solo due possibilità: 1×143 e 11×13. La prima è da escludere per ipotesi. Allora gli stranieri potrebbero essere al massimo 13 e quindi gli spagnoli al massimo $13 - 2 = 11$.

9. (Punti 6) Nel piano cartesiano considera un quadrato Q i cui vertici hanno, ciascuno, entrambe le coordinate intere. Per quale dei seguenti motivi non può accadere che l'area di Q sia 27?

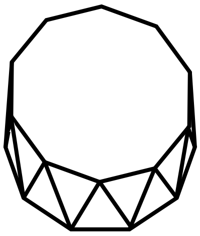
A) Perché 27 è un intero dispari. B) Perché 27 non è la somma di due quadrati perfetti.

C) Perché 27 è un cubo perfetto. D) Perché 27 non è un quadrato perfetto.

E) Nessuno dei precedenti è un valido motivo.

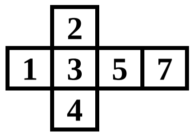
Risposta: B). Soluzione. Per il teorema di Pitagora, il quadrato della misura del lato di Q deve essere la somma di due quadrati perfetti. Le altre quattro affermazioni sono facilmente confutabili (per confutare C basta, ad esempio, supporre che due vertici adiacenti di Q siano i punti (0, 2) e (2, 0)).

Quesiti a risposta aperta



10. (Punti 4) Un *n-antiprisma* è un solido come quello suggerito dalla figura. Ha una base inferiore e una base superiore che sono poligoni regolari congruenti di n lati e una superficie laterale costituita da triangoli ottenuti congiungendo ogni coppia di vertici adiacenti di ciascuna base con uno dei vertici dell'altra, sempre come suggerito dalla figura. Quante facce ha, comprese le basi, un 2024-antiprisma?
Risposta: 4050. Soluzione. Ogni lato di ogni base genera una e una sola faccia della superficie laterale.

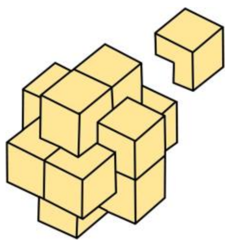
11. (Punti 5) Su ogni faccia di un cubo è scritto un numero intero positivo e i sei numeri sono tutti diversi fra loro. Sai che, comunque tu consideri due facce adiacenti, l'unico divisore comune ai due numeri che vi compaiono è 1. Quanto deve valere, al minimo, la somma dei sei numeri? *Ricordiamo che si dice che due facce sono adiacenti se hanno uno spigolo in comune*.



Risposta: 0022. Soluzione. È chiaro che il numero 6 non può venire impiegato in quanto si verrebbe necessariamente a trovare in una faccia adiacente a quella con 2 o a quella con 3 o a quella con 4.

12. (Punti 5) Ho scritto su un foglio tutti i numeri interi da 2 a 60 inclusi. Ho poi dato il foglio ad un amico insieme alla seguente istruzione: ogni volta che io dico un numero, devi cancellare dal foglio quel numero e tutti i suoi multipli. Voglio che, alla fine, tutti i numeri scritti sul foglio siano cancellati. Quanti numeri, al minimo, devo dire?
Risposta: 0017. Soluzione. Devo chiedergli di cancellare tutti i numeri primi minori di 60, cioè quelli che non hanno divisori diversi da 1 e da sé stessi.

13. (Punti 6) L'insieme dei numeri interi tra 1 e 18 inclusi va ripartito in nove coppie, in modo che la somma dei due numeri che compongono ogni coppia sia un quadrato perfetto. In quanti diversi modi è possibile farlo?
Risposta: 0001. Soluzione. I quadrati perfetti ottenibili sommando i due numeri delle varie coppie possono essere solo 4, 9, 16 o 25. Si vede immediatamente che alcuni accoppiamenti sono obbligati: (18, 7), (17, 8), (16, 9); inoltre, visto che $9 - 2 = 7$, è obbligato anche l'accoppiamento (2, 14). Da quest'ultimo segue però che anche tutti gli altri sono obbligati: si deve avere (11, 5), dunque nell'ordine (4, 12), (13, 3), (6, 10), (1, 15).



14. (Punti 6) In figura vedi un mattoncino isolato a forma di L ricavato da un cubo di lato 1 cm rimuovendo un parallelepipedo di dimensioni, in centimetri, ½, ½ e 1. Incollando 4 di questi mattoncini con 10 cubetti di lato 1 si è ottenuto il solido centralmente simmetrico che vedi in figura. Qual è, in centimetri quadrati, la sua superficie?
Risposta: 0042. Soluzione. Proiettando perpendicolarmente il solido dall'alto si ottiene una figura piana costituita dall'unione di 4 quadrati con 4 parti della faccia di un quadrato, ciascuna delle quali di area 3/4. Le possibili proiezioni di questo tipo lungo le altre due direzioni perpendicolari (due versi per ciascuna) sono 6, identiche fra loro.
In alternativa.
La parte esterna del solido è costituita da 4×3 cubetti come quello in figura, ognuno dei quali risulta avere in vista due facce complete (area complessiva 2 cm^2) e due facce scavate (area complessiva 3/2 cm^2) in totale $12 \times 7/2 = 42$ cm^2.

15. (Punti 6) Quattro numeri reali a, b, c, d tutti diversi da 0 sono tali che la loro somma è 0, come pure la somma dei loro inversi con l'inverso del loro prodotto. Quanto vale $(cd - ab)(c + d)$?
Risposta: 0001. Soluzione. Dalla seconda condizione si ottiene $cd(a + b) + ab(c + d) = -1$. Dalla prima, essendo $a + b = -(c + d)$, si ottiene allora che il numero cercato è 1.

16. (Punti 7) Le ruote della bicicletta di Aldo hanno un raggio di 30 cm, quelle della bicicletta di Bernardo un raggio di 24 cm. Aldo e Bernardo iniziano a pedalare allo stesso istante nella stessa direzione e, a parità di tempo, il numero di giri fatti dalle loro ruote è lo stesso e si mantiene costante durante la pedalata. Dopo 15 minuti Aldo si ferma per aspettare Bernardo. Per quanti secondi lo dovrà aspettare?
Risposta: 0225. Soluzione. Il rapporto tra le lunghezze dei raggi (A/B) è 5/4, la lunghezza della circonferenza è proporzionale al raggio dunque la proporzione inversa vale tra i tempi necessari a percorrere una stessa distanza. Allora per arrivare dove è arrivato Aldo, a Bernardo serve 5/4 del tempo impiegato da Aldo, dunque 1/4 in più del tempo da lui impiegato finora.

17. (Punti 7) Voglio esprimere il maggior numero possibile di interi utilizzando solo la cifra 4 ed esattamente quattro volte. Posso accostare più volte la cifra 4, utilizzare le quattro operazioni aritmetiche e disporre parentesi nei modi che ritengo opportuni. Ad esempio posso scrivere $0 = 4 - 4 + 4 - 4$, oppure $15 = 44/4 + 4$, oppure $160 = (44 - 4) \times 4$. Quanti dei numeri interi tra 0 e 10 compresi posso esprimere con questa procedura?
Risposta: 0011. Soluzione. $0 = 4 - 4 + 4 - 4$; $1 = 44/44$; $2 = 4/4 + 4/4$; $3 = (4 + 4 + 4)/4$; $4 = 4 - (4 - 4)/4$; $5 = (4 \times 4 + 4)/4$; $6 = (4 + 4)/4 + 4$; $7 = 44/4 - 4$; $8 = 4 + 4 + 4 - 4$; $9 = 4 + 4 + 4/4$; $10 = (44 - 4)/4$.

18. (Punti 8) Sommando i cubi di alcuni numeri interi consecutivi si ottiene come risultato 2024. Quanti possono essere al massimo questi interi? *Può essere utile ricordare che, per ogni intero positivo n, la somma dei cubi dei primi n interi positivi coincide con il quadrato della somma di questi primi n interi.*
Risposta: 0011. Soluzione. La somma dei primi n interi positivi vale $n(n + 1)/2$: velocemente si trova allora che $45^2 = 2025$ è la somma di cubi degli interi da 1 a 9. Dunque 2024 è la somma dei cubi degli interi da 2 a 9, ma anche dei cubi degli interi da -1 a 9. È facile appurare che questa sequenza di interi consecutivi non può essere estesa.