Semifinale individuale Benjamin

Quesiti a risposta chiusa

1. (Punti 2) Adele, Beatrice e Cecilia hanno pensato ciascuna un numero. Sommando il numero di Adele a quello di Beatrice si ottiene 20, sommando il numero di Adele a quello di Cecilia si ottiene 24, sommando il numero di Adele a quello di Beatrice e a quello di Cecilia si ottiene 44. Quanto si ottiene se si moltiplicano tra loro i tre numeri?

A) 2024 B) 1012 C) 880 D) 440 E) 0

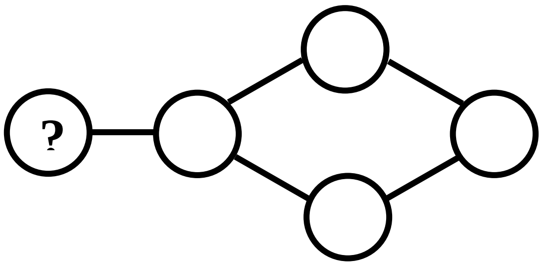
Risposta: E). Soluzione. La somma dei tre numeri coincide con la somma del doppio del numero di Adele e degli altri due: allora il numero di Adele deve essere 0.

2. (Punti 3) Nel piano sono tracciate 2024 circonferenze tutte distinte tra loro. Quanti potrebbero essere al massimo i punti comuni a tutte le circonferenze?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 1012

Risposta: C). Soluzione. Per due punti passano infinite circonferenze complanari (ogni punto dell'asse del segmento che li ha come estremi è centro di una di esse), per tre punti ne passa una sola.

3. (Punti 3) Ciascuno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 va collocato in uno dei cerchi in figura (uno solo per cerchio) in modo che due numeri consecutivi non stiano mai in due cerchi connessi da un segmento. Quale numero va collocato al posto del punto di domanda?



A) Solo 2. B) Solo 3. C) 2 oppure 4.
D) 1 oppure 5. E) Solo 1.

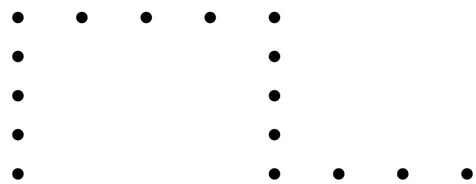
Risposta: B). Soluzione. Per verifica diretta sui 5 numeri. (bisogna che i vertici del rombo contengano coppie di numeri consecutivi disposti ai vertici opposti)

4. (Punti 4) Immagina di elencare tutti n numeri interi da 1 in poi disponendoli come indicato dalla figura, dove ogni "segmento verticale" e ogni "segmento orizzontale" di numeri consecutivi ne contiene esattamente 5. In quale riga, partendo dall'alto, si trova il numero 2.024?

Riga 1	→	5	6	7	8	9				21	22	23	24	25			
Riga 2	→	4				10				20				26			
Riga 3	→	3				11				19				27			
Riga 4	→	2				12				18				28			
Riga 5	→	1				13	14	15	16	17				29	30	31	…

A) La prima. B) La seconda. C) La terza. D) La quarta. E) La quinta.

Risposta: A). Soluzione. La disposizione è costituita da un allineamento di moduli come quello in figura, ognuno dei quali ospita 16 interi consecutivi. Si ha 2.024 = 16 × 126 + 8: allora 2.024 si trova nella stessa riga del numero 8, dunque nella prima.



5. (Punti 4) La mamma ha regalato ai suoi figli dei cioccolatini, lo stesso numero a tutti. Quando ognuno ne ha mangiati 6, si sono resi conto che, complessivamente, i cioccolatini rimasti sono tanti quanti ciascuno ne aveva ricevuti dalla mamma. Qual è il numero di cioccolatini che la mamma ha regalato in totale?

A) 27 B) 48 C) 36 D) 21 E) Potrebbe non essere alcuno dei precedenti.

Risposta: E). Soluzione. Se n è il numero dei figli, il numero cercato deve essere tale che, sottraendogli $6n$, si ottenga $1/n$ del numero stesso. Questo è vero per 27 se $n = 3$ ma anche, per esempio, per 32 se $n = 4$.
Oppure:
Se n è il numero dei figli e k il numero di cioccolatini per ogni figlio, $6n = k(n - 1)$, cioè $k = \frac{6n}{n-1}$. Dato che $n - 1$ divide n solo per n=2, bisogna che $n - 1$ sia un divisore di 6: per n=2, k=12 e numero totale di cioccolatini 24; per n=3, k=9 e numero totale di cioccolatini 27; per n=4, k=8 e numero totale di cioccolatini 32; per n=7, k=7 e numero totale di cioccolatini 49.

6. (Punti 4) Vuoi ripartire l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in quattro coppie di numeri tali che la differenza fra il maggiore e il minore dei numeri di ogni coppia sia sempre la stessa. In quanti diversi modi lo puoi fare?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Risposta: B). Soluzione. Le differenze da prendere in esame sono solo 1, 2, 3 e 4: il numero 4 non ha differenza maggiore di 4 con alcuno degli altri. Ogni possibile differenza determina una e una sola ripartizione. Per 1 abbiamo le coppie {1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}; per 2 abbiamo le coppie {1, 3}, {2, 4}, {5, 7}, {6, 8}; per 4 abbiamo le coppie {1, 5}, {2, 6}, {3, 7}, {4, 8}. Con 3 non è possibile procedere: sia 2 sia 8 dovrebbero essere in coppia con 5.

7. (Punti 5) La nonna prepara alcuni dolcetti; raccomanda ai suoi nipotini di aspettare a mangiarli e si allontana per pochi minuti. Un nipotino disobbedisce e mangia un dolcetto. La nonna ritorna, scopre che manca un dolcetto e chiede ai nipotini: "Chi è stato?"

Angelo risponde: "Non sono stato io".
Bruno risponde: "È stato Carlo".
Donato risponde: "È stato Bruno".
Carlo risponde: "Donato ha detto una bugia".

Uno solo ha mentito. Chi?

A) Angelo B) Bruno C) Carlo D) Donato
E) Potrebbe aver mentito Bruno oppure Donato, ma non è possibile stabilirlo con certezza.

Risposta: D) Sol. Se il disobbediente fosse stato Angelo, mentirebbero sia Bruno, sia Donato. Se fosse stato Bruno, oltre a lui mentirebbe anche Carlo. Se fosse stato Donato, oltre a lui mentirebbe Bruno. Allora è stato Carlo, ed è Donato che ha mentito.

8. (Punti 5) Sofia ha in mente due numeri interi positivi minori di 20 che differiscono per più di 2. Ne moltiplica uno per 5, somma l'altro al prodotto che ha ottenuto e raddoppia il risultato: ottiene così 212. Qual è la somma dei due numeri che aveva in mente?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Risposta E). Sol. Se x e y sono i due numeri, deve essere $(5x + y) \times 2 = 10x + 2y = 212$. Poiché $2y$ può essere al massimo 38, $10x$ deve essere almeno 174, che per noi significa almeno 180 e, ovviamente, non più di 190. $x = 18$ comporterebbe $y = 16$, non accettabili. Allora $x = 19$ e $y = 11$.

9. (Punti 6) Considera l'allineamento di cifre

202420242024…20242024

dove la quaterna ordinata 2024 compare 1.012 volte. Ogni blocco che sia formato da un qualunque numero di cifre consecutive in questo allineamento e non incominci con 0 individua un numero intero un numero intero (ad esempio il blocco 4202420, che parte dalla quarta cifra e termina con la decima oppure dall'ottava e termina con la quattordicesima e così via, individua il numero 4.202.420). Quanti numeri interi tutti diversi tra loro, determinati da blocchi ammissibili, risultano divisibili per 4?

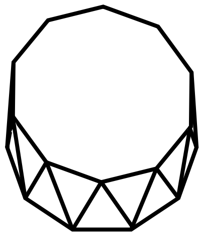
A) 2021 B) 2024 C) 2025 D) 6067 E) 6070

Risposta: E). Soluzione. Tutti e soli i numeri che ci interessano non possono terminare con 2 (infatti nessun numero di almeno tre cifre che termini con 02 o 42 è divisibile per 4), ma possono terminare con 0 (cioè, per noi, con 20) o con 4. Ogni blocco accettabile che termini con 0 deve iniziare con 20 o con 2420 o con 420 e può essere seguito da una quantità di 2420 consecutivi che varia da 0 a 1.011 per 20 e da 0 a 1.010 per 2420 e 420, per un totale di 3.034 possibilità. Ogni blocco accettabile che termini con 4 deve iniziare con 2024 o con 24 o con 4 e le possibilità sono 1.012 in ciascun caso, per un totale di 3.036.

Quesiti a risposta aperta

10. (Punti 4) Tra i numeri interi che hanno tre cifre e sono divisibili per 4, qual è quello per il quale la somma delle cifre è la più alta possibile?
Risposta: 0988. Soluzione. La somma più alta possibile delle cifre di un numero di tre cifre è 27 (999); il numero (pari) 998 non è divisibile per 4: occorre dunque diminuire ancora di un'unità (e 898 non è divisibile per 4).

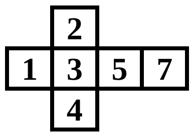
11. (Punti 5) Ci sono sei buste numerate allineate: dalla terza in poi, ognuna contiene tanti francobolli quanti ne contengono complessivamente le due immediatamente precedenti. La sesta contiene 71 francobolli, la quinta ne contiene 43. Quanti francobolli contiene la prima?
Risposta: 0002. Soluzione. Procedendo a ritroso, la quarta ne contiene 71 – 43 = 28, la terza 43 – 28 = 15, la seconda 28 – 15 = 13, la prima 15 – 13 = 2.



12. (Punti 5) Un *n-antiprisma* è un solido come quello suggerito dalla figura. Ha una base inferiore e una base superiore che sono poligoni regolari congruenti di *n* lati e una superficie laterale costituita da triangoli ottenuti congiungendo ogni coppia di vertici adiacenti di ciascuna base con uno dei vertici dell'altra, sempre come suggerito dalla figura. Quante facce ha, comprese le basi, un 2024-antiprisma?
Risposta: 4050. Soluzione. Ogni lato di ogni base genera una e una sola faccia della superficie laterale.

13. (Punti 6) Ho moltiplicato fra loro 9 numeri: ognuno di essi è 2 oppure 3. Il risultato di tale operazione è un numero compreso fra 600 e 1.000. Qual è la somma delle cifre di questo numero?
Risposta: 0021. Soluzione. Si ha $2^9 = 512 < 600$, dunque almeno uno dei fattori deve essere 3. D'altra parte, se almeno due fattori fossero 3, il prodotto sarebbe maggiore o uguale a $9 \times 2^7 > 1.000$. Allora 8 fattori sono 2 e uno solo è 3, con 768 come risultato dell'operazione.

14. (Punti 6) Su ogni faccia di un cubo è scritto un numero intero positivo e i sei numeri sono tutti diversi fra loro. Sai che, comunque tu consideri due facce adiacenti, l'unico divisore comune ai due numeri che vi compaiono è 1. Quanto deve valere, al minimo, la somma dei sei numeri? *Ricordiamo che si dice che due facce sono adiacenti se hanno uno spigolo in comune.*
Risposta: 0022. Soluzione. È chiaro che il numero 6 non può venire impiegato in quanto si verrebbe necessariamente a trovare in una faccia adiacente a quella con 2 o a quella con 3 o a quella con 4.



15. (Punti 6) Ho scritto su un foglio tutti i numeri interi da 2 a 60 inclusi. Ho poi dato il foglio ad un amico insieme alla seguente istruzione: ogni volta che io dico un numero, devi cancellare dal foglio quel numero e tutti i suoi multipli. Voglio che, alla fine, tutti i numeri scritti sul foglio siano cancellati. Quanti numeri, al minimo, devo dire?

Risposta: 0017. Soluzione. Devo chiedergli di cancellare tutti i numeri primi minori di 60, cioè quelli che non hanno divisori diversi da 1 e da sé stessi.

16. (Punti 7) L'insieme dei numeri interi tra 1 e 18 inclusi va ripartito in nove coppie, in modo che la somma dei due numeri che compongono ogni coppia sia un quadrato perfetto. In quanti diversi modi è possibile farlo?
Risposta: 0001. Soluzione. I quadrati perfetti ottenibili sommando i due numeri delle varie coppie possono essere solo 4, 9, 16 o 25. Si vede immediatamente che alcuni accoppiamenti sono obbligati: (18, 7), (17, 8), (16, 9); inoltre, visto che 9 – 2 = 7, è obbligato anche l'accoppiamento (2, 14). Da quest'ultimo segue però che anche tutti gli altri sono obbligati: si deve avere (11, 5), dunque nell'ordine (4, 12), (13, 3), (6, 10), (1, 15).

17. (Punti 7) Sommando i cubi di alcuni numeri interi positivi consecutivi si ottiene come risultato 2024. Quanto vale il prodotto del primo con l'ultimo di questi interi? *Può essere utile ricordare che, per ogni intero positivo n, la somma dei cubi dei primi n interi positivi coincide con il quadrato della somma di questi primi n interi*.
Risposta: 0018. Sol. La somma dei primi n interi positivi vale $n(n + 1)/2$: velocemente si trova allora che $45^2 = 2025$ è la somma dei cubi degli interi da 1 a 9. Dunque 2024 è la somma dei cubi degli interi da 2 a 9.

18. (Punti 8) Le ruote della bicicletta di Aldo hanno un raggio di 30 cm, quelle della bicicletta di Bernardo un raggio di 24 cm. Aldo e Bernardo iniziano a pedalare allo stesso istante nella stessa direzione e, a parità di tempo, il numero di giri fatti dalle loro ruote è lo stesso e si mantiene costante durante la pedalata. Dopo 15 minuti Aldo si ferma per aspettare Bernardo. Per quanti secondi lo dovrà aspettare?
Risposta: 0225. Soluzione. Il rapporto tra le lunghezze dei raggi (A/B) è 5/4, la lunghezza della circonferenza è proporzionale al raggio dunque la proporzione inversa vale tra i tempi necessari a percorrere una stessa distanza. Allora per arrivare dove è arrivato Aldo, a Bernardo serve 5/4 del tempo impiegato da Aldo, dunque 1/4 in più del tempo da lui impiegato finora.