Kangourou della Matematica 2024
finale nazionale italiana
Cesenatico, 21 settembre 2024

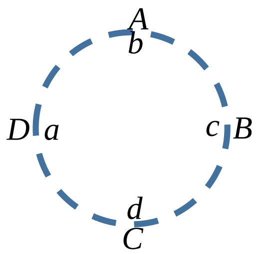
LIVELLO BENJAMIN

Tutte le risposte devono essere giustificate

B1. (*5 punti*) Quattro amici vivono da soli, ciascuno in una casa diversa da quella degli altri. Non sono mai assenti da casa tutti e quattro contemporaneamente e vogliono che, se succede qualcosa nella casa di uno di loro quando è assente, almeno uno degli altri tre, trovandosi a casa propria, possa intervenire entrando con la chiave. Decidono allora di lasciare una chiave ad almeno un amico che la custodirà in casa sua in un posto noto a tutti e quattro. Qual è il minimo numero di chiavi della propria casa che ognuno deve lasciare agli amici, considerati nel loro insieme? E come vanno disposte le chiavi lasciate?

Risposta: 1.

Svolgimento. Se le case sono *A, B, C* e *D,* basta che in *A* ci sia la chiave di *B*, in *B* quella di *C,* in *C* quella di *D* e in *D* quella di *A.* Ad esempio, se succede qualcosa in casa di *B* quando tutti tranne *C* sono assenti, basta che *C* vada nella casa di *D* a prendere la chiave di *A* e di lì nella casa di *A* a prendere quella di *B.*



B2. (*7 punti*) Nella strana lingua di Kanglandia, le parole “sì” e “no” si traducono in “*KAB*” e “*BAK*”, ma non necessariamente in quest’ordine. Incontri una persona, della quale ti puoi fidare, che conosce sia l’italiano sia la lingua di Kanglandia e le chiedi: «È vero che *KAB* significa “sì”?». La persona risponde: “*KAB*”. Puoi dedurre se “*KAB*” significa “sì” oppure “no”?

Risposta: no.

Svolgimento. La risposta sarebbe comunque “*KAB*” qualunque sia il suo significato.

B3. (*11 punti*) Otto oggetti sono allineati. Vanno dipinti quattro in rosso, tre in blu e uno in giallo, ma in modo che oggetti adiacenti ricevano colori diversi. Quante diverse colorazioni sono ammissibili?

Risposta: 14.

Svolgimento. Elenchiamo gli allineamenti possibili con riferimento al solo colore rosso, *R*, ognuno degli altri due sarà indicato con *X*. *RXRXRXRX* e *XRXRXRXR* forniscono ciascuno 4 allineamenti (una sola delle *X* deve indicare il giallo); *RXXRXRXR*, *RXRXXRXR* e *RXRXRXXR* ne forniscono 2 ciascuno (delle due *X* adiacenti una e una sola deve indicare il giallo).

B4. (*14 punti*) Considera tutte le possibili frazioni di valore non superiore a 1, nelle quali sia il numeratore sia il denominatore sono numeri interi tra 1 e 6 inclusi. Sono di più le frazioni riducibili o quelle irriducibili?

Risposta: le irriducibili.
Svolgimento. Le frazioni ammissibili sono in numero di $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$. Eventualmente aiutandosi con una griglia triangolare, si ottiene facilmente che quelle riducibili sono $4 + 5$.

B5. (*18 punti*) Tre abitazioni sono ai vertici di un triangolo isoscele i cui lati misurano 80, 80 e 120 metri. Utilizzando un'unica antenna, si vuole rendere possibile la ricezione di internet nelle tre abitazioni. Qual è, in metri, la minima distanza che può avere l'antenna dall'abitazione che le risulterà più lontana?

Risposta: 60.
Svolgimento. Certamente la minima distanza non può essere inferiore alla metà della lunghezza del lato più lungo (disuguaglianza triangolare). In effetti, collocando l'antenna a metà del lato lungo, la distanza dall'abitazione opposta sarebbe (Pitagora) $10 \times \sqrt{28} < 60$.

B6. (*22 punti*) Marco prova ad eseguire le seguenti operazioni: sceglie un numero di tre cifre tutte diverse fra loro, scrive il numero che ottiene invertendo l'ordine delle cifre e calcola la differenza fra il maggiore e il minore dei due numeri. Se questa differenza ha solo due cifre, premette a questa differenza la cifra 0, altrimenti la lascia inalterata. Infine, somma al numero così ottenuto il numero che ricava invertendo l'ordine delle sue cifre. Quale risultato ottiene? La nostra domanda lascia intendere che il risultato non dipende dal numero che Marco ha scelto inizialmente: spiega il motivo.

Risposta: 1089.
Svolgimento. L'enunciato lascia intendere che il risultato non dipende dal numero scelto inizialmente: si può allora partire ad esempio da 321, sottraendo 123 e ottenendo 198 a cui poi va sommato 891. Il motivo per il quale il risultato non dipende dalla scelta iniziale è il seguente. Sia ABC il numero iniziale: possiamo sempre supporre $A > C$. La differenza

$$ABC - CBA = (A \times 100 + B \times 10 + C) - (C \times 100 + B \times 10 + A)$$

si può riscrivere come

$$(A - C - 1) \times 100 + 9 \times 10 + (10 - A + C),$$

che permette di evidenziarne le cifre (certamente comprese tra 0 e 9 inclusi). Basta ora osservare che

$$[(A - C - 1) \times 100 + 9 \times 10 + (10 - A + C)] + [(10 - A + C) \times 100 + 9 \times 10 + (A - C - 1)] = 1.089,$$

per ogni valore delle cifre A e C.