

Semifinale individuale Student

Quesiti a risposta chiusa

1. (Punti 2) Quanti numeri interi positivi minori di 40 hanno la proprietà che la somma dei quadrati delle loro due cifre è essa stessa un quadrato perfetto? (I numeri vanno pensati comunque di due cifre, ad esempio 4 va pensato scritto come 04.)

- A) 1 B) 9 C) 12 D) 13 E) 14

2. (Punti 3) Il codice di una cassetta di sicurezza è un numero di quattro cifre. La somma delle ultime due è un numero primo di due cifre che, lette nell'ordine, sono le prime due cifre del codice. Disponendo soltanto di queste informazioni, quanti tentativi saranno necessari, al massimo, per aprire la cassetta?

- A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

3. (Punti 3) Il prodotto di 9 numeri interi scritti utilizzando esclusivamente le cifre 2 e/o 3 è un numero compreso fra 600 e 1200. Qual è la somma delle cifre di questo prodotto?

- A) 18 B) 21 C) 23 D) 25 E) Esiste più di una possibilità

4. (Punti 4) Sono dati tre numeri interi ciascuno di tre cifre (cioè la prima cifra di ciascuno non può essere 0) che denotiamo con TAP , BAT e CAD dove ogni lettera rappresenta una cifra, lettere diverse cifre diverse. Si sa che $TAP + BAT = CAD$. Qual è il più grande valore possibile per il numero CAD ?

- A) 782 B) 892 C) 893 D) 908 E) 987

5. (Punti 4) Tre sfere di raggio 1 sono disposte nello spazio in modo che i loro centri formino un triangolo equilatero di lato 3. Qual è il maggior numero di parti nelle quali il complesso delle tre sfere può essere ripartito tagliando le sfere con due piani?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

6. (Punti 4) Si sa che i tre numeri m , n e $(8^m \times 10^{2m}) / (5^{-m-n} \times 20^{3m})$ sono tutti interi e diversi da zero. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A) $m < 0, n > 0$ B) $m > 0, n > 0$ C) $m > 0, n < 0$ D) $m < 0, n < 0$ E) $m + n \geq 0$

7. (Punti 5) Immagina di ripetere indefinitamente l'allineamento di lettere $ABBCCCDDE$, ottenendo dunque l'allineamento periodico $ABBCCCDDEABBCCCDDEABBC\dots$. Per quante delle seguenti coppie (X, n) è falsa la seguente affermazione: "La n -esima lettera dell'allineamento periodico è X "?

- i) $(A, 20 \times 23)$ ii) $(A, 20^{23})$ iii) $(C, 20^{23})$ iv) $(E, 3^{202})$

- A) 0 (sono tutte vere) B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 (sono tutte false)

8. (Punti 5) Un villaggio ha 5 case, ogni abitante vive in una di queste 5 case e in ognuna vive qualcuno. Tutti gli abitanti che vivono in 4 di esse dicono sempre la verità, tutti gli abitanti che vivono nella casa rimanente mentono sempre. Passando di casa in casa sono state raccolte le seguenti dichiarazioni:

Casa A: "In questa casa vivono 3 persone", "In questo villaggio vivono più di 17 persone".

Casa B: "In questa casa vivono 4 persone", "In questo villaggio vivono più di 21 persone".

Casa C: "In questa casa vivono 5 persone", "Il numero di persone che vivono in questo villaggio NON è 25".

Casa D: "In questa casa vivono 6 persone", "In questo villaggio vivono meno di 29 persone".

Casa E: "In questa casa vivono 7 persone", "In questo villaggio vivono meno di 33 persone".

In quale casa vivono i mentitori?

- A) Nella casa A. B) Nella casa B. C) Nella casa C. D) Nella casa D.
E) Nella casa E.

9. (Punti 6) Supponiamo che nel piano, dotato di un sistema cartesiano ortogonale monometrico, comunque considerati due punti, si possa passare da uno all'altro solo muovendosi parallelamente agli assi; in tal caso la lunghezza del segmento di estremi (x, y) e (a, b) , cioè la distanza del punto (x, y) dal punto (a, b) , è $|x - a| + |y - b|$. Se i termini "raggio" e "circonferenza" di centro assegnato vengono definiti nel modo usuale, ma rispetto a questa nuova nozione di distanza e non alla distanza euclidea, quanto vale il rapporto, in questa nuova nozione di distanza, tra lunghezza della circonferenza e raggio relativo?

- A) 2 B) 2π C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 8

Quesiti a risposta aperta

10. (Punti 4) Gianna gioca così. Scrive un numero intero n , poi lo moltiplica a caso o per 5 o per 6. Al prodotto somma a caso o 5 o 6. Alla somma sottrae a caso o 5 o 6. Se il risultato finale è 78, che numero è n ?

11. (Punti 5) Qual è il più piccolo intero primo $p > 2$ tale che il numero $p^3 + 7p^2$ sia un quadrato perfetto?

12. (Punti 5) Sia A la somma dei quadrati di tutti i numeri interi positivi da 1 a 2.023 inclusi e sia

$$B = (1 \times 3) + (2 \times 4) + (3 \times 5) + \dots + (2.022 \times 2.024).$$

Quanto vale $A - B$?

13. (Punti 6) Qual è il più piccolo numero reale k tale che la disuguaglianza

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq k(x^4 + y^4 + z^4)$$

valga per ogni terna $\{x, y, z\}$ di numeri reali?

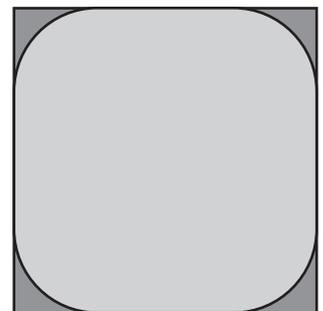
14. (Punti 6) Dall'insieme dei numeri interi tra 1 e 17, questi inclusi, si possono levare due numeri in modo che il loro prodotto coincida con la somma dei rimanenti e vi è un solo modo per farlo. Quanto vale tale prodotto?

15. (Punti 6) Denotiamo con f una funzione definita su tutto l'asse reale e a valori reali; supponiamo che f soddisfi, per ogni valore reale di x , la catena di disuguaglianze

$$f(x - 5) + 2 \leq x - 2023 \leq f(x + 4) - 7.$$

La funzione f si annulla per un solo valore di x : quale?

16. (Punti 7) Gli angoli di un quadrato vengono smussati con archi circolari, tutti dello stesso raggio, come indica la figura; la parte rettilinea del bordo della nuova regione è lunga quanto la parte curva. Il rapporto fra il perimetro della nuova figura e il perimetro del quadrato originario è il numero $p/100$. Qual è l'intero più vicino a p ?



17. (Punti 7) Si consideri un triangolo di perimetro 64 e la circonferenza in esso inscritta. Tra le rette tangenti a tale circonferenza, se ne consideri una che sia parallela ad uno dei lati del triangolo. Quanto potrebbe essere lungo al massimo un segmento di tale retta contenuto nel triangolo?

18. (Punti 8) In un gruppo di 2023 persone, ognuna ha antipatia verso esattamente un'altra persona, ma la relazione non è necessariamente simmetrica. Senza conoscere la situazione reale, si vuole essere certi a priori di poter selezionare n persone fra le 2023 in modo che nessuna di esse abbia antipatia verso qualcuna delle rimanenti $n - 1$ selezionate. Qual è il più grande valore di n ?