Kangourou della Matematica 2023
Coppa Junior a squadre
Finale 2
Cervia, 4 maggio 2023

Quesiti

1. Un trapezio

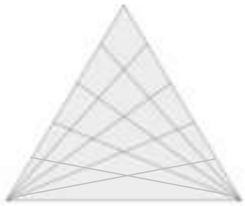
Un trapezio è ripartito dalle sue due diagonali in quattro triangoli. Se 5 e 125 sono le aree dei due di questi triangoli che condividono uno dei loro lati con uno dei lati paralleli del trapezio, quanto vale l'area del trapezio?

2. Palindromo

Un numero intero di almeno due cifre si dice *palindromo* se coincide con il numero ottenuto leggendo le sue cifre da destra verso sinistra: ad esempio 313 è palindromo, ma 133 non lo è. C'è un solo intero (positivo) il cui quadrato è un numero di sei cifre palindromo: qual è?

3. I triangoli

Quanti triangoli è possibile visualizzare nella figura a destra?



4. Sommando le cifre

L'allineamento 22222222221111111111 è costituito da dieci cifre 2 seguite da altrettante cifre 1. Scegliamo una coppia di cifre adiacenti e sostituiamo ad essa la loro somma: otteniamo un allineamento di 19 cifre, ad esempio 2222222223111111111 oppure 2422222221111111111. Eseguiamo questa operazione di volta in volta su ogni allineamento che otteniamo, con il vincolo che la coppia di cifre su cui operiamo fornisca una somma di una sola cifra, riducendo così di 1 per volta il numero di cifre dell'allineamento. Qual è la differenza fra il maggiore e il minore dei numeri rappresentati dagli allineamenti di 4 cifre che possiamo ottenere?

5. Un numero di 4 cifre

Qual è il più grande numero intero di quattro cifre tale che la somma delle sue cifre coincida sia con il numero di due cifre formato dalle sue due prime cifre sia con il prodotto delle altre due?

6. Il pentagono

Il perimetro di un pentagono *ABCDE* misura 4.172 e tutti i lati hanno lunghezze intere. I lati *AE* e *BC* sono lunghi 2.023 e gli angoli in *A*, *B* e *D* sono retti. Qual è la lunghezza del più lungo fra i due lati *DC* e *ED*?

7. Cifre 0, 1, 2

Giorgio ha scritto, allineandoli in ordine crescente, tutti i numeri interi positivi fino a 2021 incluso nei quali non compaiono cifre diverse da 0, 1, 2. Ha poi alternato i segni "+" e "–", partendo dal segno "+", davanti ai numeri scritti: il suo allineamento inizia dunque con

$$1 - 2 + 10 - 11 + 12 - \ldots.$$

Infine ha eseguito (correttamente) la somma algebrica indicata dall'allineamento. Quale risultato ha ottenuto?

8. Partite vinte

Hai giocato alcune partite: non le hai vinte tutte, ma puoi dire di averne vinte il 99% se ti viene chiesto di arrotondare (nel modo usuale) la percentuale di quelle che hai vinto al numero intero più vicino. Qual è il più piccolo numero di partite che devi avere vinto perché la tua affermazione sia corretta?

9. Il torneo

Per partecipare ad un torneo, dieci ragazzi vanno ripartiti in 5 coppie. Tra di essi tuttavia vi sono due coppie di fratelli e non si vuole che due fratelli stiano in coppia insieme. Quanti diversi gruppi di cinque coppie si possono formare con questo vincolo? (Due gruppi di coppie vanno ritenuti diversi se differiscono per almeno una coppia.)

10. Sei interi consecutivi

Il prodotto di sei interi positivi consecutivi è un numero di 12 cifre della forma

$$abb\ cdd\ cdd\ abb,$$

dove le cifre a, b, c e d sono a loro volta, in ordine opportuno, cifre consecutive. Qual è il più piccolo dei sei interi consecutivi?

11. I quadrati

Un quadrato Q_0 di lato 3 viene coperto da un quadrato Q_1 (diverso da Q_0) i cui lati contengano ciascuno un vertice di Q_0. La stessa cosa viene fatta coprendo Q_1 con un quadrato Q_2 (diverso da Q_1) i cui lati contengano ciascuno un vertice di Q_1. Si procede così alcune volte rispettando questa regola fino ad ottenere un quadrato Q_n. Se si scelgono in modo opportuno i quadrati successivi a Q_0, qual è il più piccolo valore di n tale che la lunghezza del lato di Q_n superi 2022?

12. Fibonacci

La successione di numeri interi detta "di Fibonacci" è definita nel modo seguente: i primi due termini sono entrambi 1, dal terzo in poi ogni termine è la somma dei due che lo precedono. Quanti dei primi 2023 termini della successione di Fibonacci danno resto 2 quando vengono divisi per 3?

13. La pedina

Una pedina è posta nella prima casella in alto a sinistra di una scacchiera 8 × 8 (casella (1, 1)) e deve raggiungere l'ultima casella in basso a destra della scacchiera (casella (8, 8)). Ogni mossa consiste nello spostare la pedina da ogni casella in cui si trovi in una casella adiacente, cioè che condivida con essa un lato. Quanti sono i diversi percorsi che richiedono il minor numero possibile di mosse?

14. Progressioni aritmetiche

Su due progressioni aritmetiche a ragione intera si hanno solo le seguenti informazioni. Una ha come ragione 76, l'altra ha come termine iniziale 20, il primo termine comune ad entrambe è 95. In dipendenza dalle informazioni mancanti, si aprono diverse possibilità per il secondo termine comune. Qual è la somma di tutti questi secondi possibili termini comuni?

15. Il sindaco

In un paese vivono 2.023 persone e una di esse è il sindaco. Comunque si scelgano due abitanti diversi dal sindaco, essi hanno un diverso numero di amici fra gli abitanti del paese (è sottointeso che, fra gli amici di un abitante, va escluso egli stesso e che, se A è amico di B, B è amico di A). Quanti amici ha il sindaco? (*Scrivete* 9999 *se ritenete che la risposta non sia univocamente determinata*.)

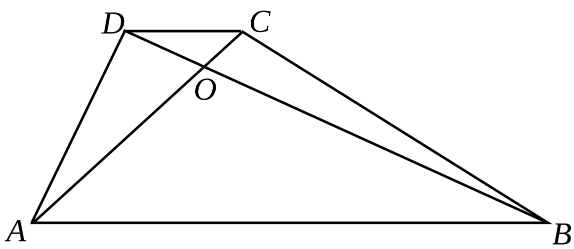
Kangourou della Matematica 2023
Coppa Junior a squadre
Finale 2
Cervia, 4 maggio 2023

Quesiti e soluzioni

1. Un trapezio

Un trapezio è ripartito dalle sue due diagonali in quattro triangoli. Se 5 e 125 sono le aree dei due di questi triangoli che condividono uno dei loro lati con uno dei lati paralleli del trapezio, quanto vale l’area del trapezio?

Risposta: 0180. Sol. I triangoli *AOB* e *DOC* sono simili, dunque, essendo 25 il rapporto delle loro aree, si ha $|AB| = 5 \times |DC|$. Quindi l’altezza del trapezio è 6 volte l’altezza di *OCD* rispetto alla base *DC*, come pure la somma delle basi è 6 volte la base di *OCD*. Ne segue che l’area del trapezio è 36 volte quella di *OCD*, cioè 180.



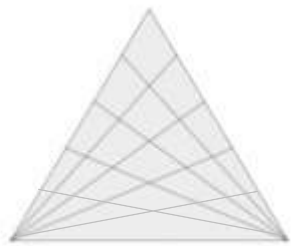
2. Palindromo

Un numero intero di almeno due cifre si dice *palindromo* se coincide con il numero ottenuto leggendo le sue cifre da destra verso sinistra: ad esempio 313 è palindromo, ma 133 non lo è. C’è un solo intero (positivo) il cui quadrato è un numero di sei cifre palindromo: qual è?

Risposta: 0836. Sol. La cifra delle unità di un quadrato perfetto palindromo può essere solo 1, 4, 5, 6, 9. Sia $n^2 = ABCCBA$ un numero di sei cifre palindromo e passiamo in rassegna i cinque casi, tenendo conto del fatto che ogni numero palindromo con un numero pari di cifre è divisibile per 11 e quindi anche n lo è.
Se $A = 1$ deve essere $310 < n < 450$. L’ultima cifra di n deve essere 1 oppure 9, dunque i candidati sono solo 319, 341 e 429, ma nessuno è accettabile.
Se $A = 4$ deve essere $630 < n < 710$.
L’ultima cifra di n deve essere 2 oppure 8, dunque i candidati sono solo 638 e 682, ma nessuno è accettabile.
Se $A = 5$ deve essere $700 < n < 780$. L’ultima cifra di n deve essere 5, dunque solo 715 è candidato e non è accettabile.
Se $A = 6$ deve essere $770 < n < 840$. L’ultima cifra di n deve essere 4 oppure 6, dunque i candidati sono solo 814 e 836 e quest’ultimo è accettabile.
Per completezza segnaliamo che con $A = 9$ dovrebbe essere $n > 940$, l’ultima cifra di n dovrebbe essere 3 o 7: dunque sarebbe da controllare solo 957, non accettabile.

3. I triangoli

Quanti triangoli è possibile visualizzare nella figura a destra?



Risposta: 0125. Sol. Ogni triangolo deve avere uno dei suoi vertici nel vertice in basso a sinistra o in quello in basso a destra del triangolo grande: in ciascuno dei casi i triangoli sono 5 volte il numero delle coppie formabili con 6 oggetti, dunque 75. I triangoli che conservano entrambi i vertici del triangolo grande sono 5×5 e sono stati contati in entrambi i casi: il totale è dunque $75 + 75 - 25$.

4. Sommando le cifre

L'allineamento 22222222221111111111 è costituito da dieci cifre 2 seguite da altrettante cifre 1. Scegliamo una coppia di cifre adiacenti e sostituiamo ad essa la loro somma: otteniamo un allineamento di 19 cifre, ad esempio 2222222223111111111 oppure 2422222221111111111. Eseguiamo questa operazione di volta in volta su ogni allineamento che otteniamo, con il vincolo che la coppia di cifre su cui operiamo fornisca una somma di una sola cifra, riducendo così di 1 per volta il numero di cifre dell'allineamento. Qual è la differenza fra il maggiore e il minore dei numeri rappresentati dagli allineamenti di 4 cifre che possiamo ottenere?

Risposta: 3996. Sol. Chiaramente il numero maggiore non può iniziare con 9, né avere 9 come seconda cifra; può però iniziare con 8, avendo ancora 8 come seconda cifra: facilmente si vede che è 8895. Il numero minore non può iniziare con 2: la somma delle cifre a disposizione è 30 e (stante il vincolo) rimane inalterata ad ogni passaggio, e non è possibile che sommando tre cifre si ottenga 28. Chiaramente la prima cifra non può essere 3. Se poniamo che sia 4, la somma delle cifre successive deve essere 26: facilmente si determina in 4899 il numero minore.

5. Un numero di 4 cifre

Qual è il più grande numero intero di quattro cifre tale che la somma delle sue cifre coincida sia con il numero di due cifre formato dalle sue due prime cifre sia con il prodotto delle altre due?

Risposta: 1863. Sol. Sia $ABCD$ un numero ammissibile di quattro cifre: deve essere $A + B + C + D = 10 \times A + B = C \times D$, da cui $9 \times A = C + D$ il che implica $A \leq 2$. Ma 2 non è accettabile perché porterebbe a $C = D = 9$. Allora si deve provare con $A = 1$, che implica $C + D = 9$. Volendo massimizzare $C \times D$ si deve partire da 20, che però è da scartare perché obbligherebbe B ad essere 10; se si scende a 18 si ottiene il numero 1863.

6. Il pentagono

Il perimetro di un pentagono $ABCDE$ misura 4.172 e tutti i lati hanno lunghezze intere. I lati AE e BC sono lunghi 2.023 e gli angoli in A, B e D sono retti. Qual è la lunghezza del più lungo fra i due lati DC e ED?

Risposta: 0045. Sol. Il quadrilatero $ABCE$ è un rettangolo, quindi (essendo intere le lunghezze dei lati) le lunghezze dei lati AB, DC e ED formano una terna pitagorica la somma dei cui elementi è 126. Si deduce [(*)] che la terna è {28, 45, 53}: a noi interessa il secondo elemento.

[(*)] È noto che un modo per ricavare terne pitagoriche è di considerare terne del tipo $2ab$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$ ove a, b sono due interi positivi. Si può quindi provare a risolvere $2ab + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 126$, cioè $a(a + b)=63$, da cui $a = 7$ e $b = 2$.

7. Cifre 0, 1, 2

Giorgio ha scritto, allineandoli in ordine crescente, tutti i numeri interi positivi fino a 2021 incluso nei quali non compaiono cifre diverse da 0, 1, 2. Ha poi alternato i segni "+" e "–", partendo dal segno "+", davanti ai numeri scritti: il suo allineamento inizia dunque con

$$1 - 2 + 10 - 11 + 12 - \dots.$$

Infine ha eseguito (correttamente) la somma algebrica indicata dall'allineamento. Quale risultato ha ottenuto?

Risposta: 1011. Sol. Sommando solo i numeri con al più due cifre si ottiene $1 - 2 + 10 - 11 + 12 - 20 + 21 - 22 = -11 = S$. La somma dei numeri fra 100 (incluso) e 199, cioè $100 - 101 + 102 - 110 + \dots + 122$ vale allora $100 - 100 + \dots + 100 - S = 100 - S$. Ragionando sullo stesso schema, quella dei numeri fra – 200 (incluso) e 999 vale $-200 + S$, quella dei numeri tra 1.000 (incluso) e 1.099 vale $1.000 - S$, quella dei numeri fra – 1.100 (incluso) e 1.199 vale $-1.100 + S$, quella dei numeri fra 1.200 (incluso) e 1.299 vale $1.200 - S$ e infine quella dei numeri fra – 2.000 e – 2.021 (inclusi) vale $-2.000 + 2.022 + S = 22 + S$. La somma totale richiesta dunque vale
$S + (100 - S - 200 + S) + (1.000 - S - 1.100 + S) + 1.200 - S + 22 + S = S + 1.000 + 22 = 1.011$.

8. Partite vinte

Hai giocato alcune partite: non le hai vinte tutte, ma puoi dire di averne vinte il 99% se ti viene chiesto di arrotondare (nel modo usuale) la percentuale di quelle che hai vinto al numero intero più vicino. Qual è il più piccolo numero di partite che devi avere vinto perché la tua affermazione sia corretta?

Risposta: 0066. Sol. Chiaramente, volendo minimizzare, le partite vinte devono essere tutte meno una. Se n è il loro numero, si deve avere $n / (n + 1) \geq 98{,}5 / 100$, da cui $n \geq 98{,}5 / 1{,}5 = 65{,}\overline{6}$; dunque $n = 66$.

9. Il torneo

Per partecipare ad un torneo, dieci ragazzi vanno ripartiti in 5 coppie. Tra di essi tuttavia vi sono due coppie di fratelli e non si vuole che due fratelli stiano in coppia insieme. Quanti diversi gruppi di cinque coppie si possono formare con questo vincolo? (Due gruppi di coppie vanno ritenuti diversi se differiscono per almeno una coppia.)

Risposta: 0750. Sol. Se per il momento ignoriamo il vincolo, ogni ragazzo può fare coppia con altri 9. Per ognuna di queste coppie, ognuno dei rimanenti può fare coppia con altri 7 e così via, per un totale di $9 \times 7 \times 5 \times 3 = 945$ gruppi di coppie possibili. Per ognuna delle due coppie "proibite", sono stati però contati $7 \times 5 \times 3 = 105$ gruppi, per un totale di 210 gruppi; tuttavia, in quest'ultimo calcolo i gruppi in cui compaiono entrambe le coppie di fratelli sono stati conteggiati due volte: questi ultimi sono in numero di $5 \times 3 = 15$. $945 - 210 + 15 = 750$.

10. Sei interi consecutivi

Il prodotto di sei interi positivi consecutivi è un numero di 12 cifre della forma

$$abb\ cdd\ cdd\ abb,$$

dove le cifre a, b, c e d sono a loro volta, in ordine opportuno, cifre consecutive. Qual è il più piccolo dei sei interi consecutivi?

Risposta: 0074. Sol. Di sei interi consecutivi, almeno tre sono pari, almeno due sono multipli di 3 e almeno uno è un multiplo di 5: allora il numero considerato, oltre che per 3, è divisibile per 10, dunque $b = 0$ il che implica che le altre cifre siano 1, 2, 3. La somma delle sue cifre è allora $2(a + b + c) + 2d = 12 + 2d$ che deve essere divisibile per 3: ciò implica $d = 3$ e quindi il numero è della forma

$$a00\ c33\ c33\ a00 \text{ con } \{a, c\} = \{1,2\}$$

Notiamo che il prodotto è certamente divisibile per 11, essendo la somma delle cifre di posto pari $0 + 3 + c + 3 + 0 + a$ uguale a quella delle cifre di posto dispari. Inoltre, visto che termina con due zeri, il numero è divisibile per 5^2. Quindi nei fattori ci deve essere un multiplo di 11 e, a scelta, un solo multiplo di 25 o due multipli di 5, ma non di 25 (non è possibile che si presentino tanto il multiplo di 25 che quello di 5 poiché il numero sarebbe anche multiplo di 1.000, ma a non è 0).
Inoltre il prodotto è multiplo di 13 poiché lo è $1.001 = 7 \times 11 \times 13$ e quindi lo sono i 3 addendi

$$a\times(10^9 + 1) \equiv a\times(10^3 + 1)\,(10^6 - 10^3 + 1), \quad c\times10^3\times(10^3 + 1) \quad \text{e} \quad 33\times10^2\times(10^3 + 1).$$

Quindi nella sequenza deve esserci uno dei numeri …, 52, 65, 78, 91. Non esistono sequenze di sei numeri consecutivi contenenti 91, due multipli di 5 e un multiplo di 11.
Non esistono sequenze di sei numeri consecutivi contenenti 52, un multiplo di 11 e due (soli) multipli di 5 e non ha comunque senso fare tentativi con sestuple contenenti multipli di 13 minori di 65, come mostrato subito dopo.
Poiché il prodotto ha ordine di grandezza 10^{11}, la sequenza 65, … ,70 non va bene poiché il prodotto dei suoi elementi è minore di

$$(67\times68)^3 = 4556^3 < 4{,}6^3 \times 10^9 < 10^{11}.$$

Restano quindi da prendere in esame le due sequenze contenenti 75, 77 e 78 ma non 80: 73, 74, 75, 76, 77, 78 oppure 74, 75, 76, 77, 78, 79. Notiamo che
$74\times75\times76\times77\times78 = 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times (75 \times 16 \times 3) = (7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37) \times 3.600$ è comune ai due prodotti e che questo prodotto ha come cifra delle centinaia 8 (infatti $7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \equiv 3 \bmod 10$).
Moltiplicando per 73 si avrebbe la cifra delle centinaia 4 e non 1 o 2 come dovrebbe; invece, moltiplicando per 79, la cifra delle centinaia è 2 e in effetti $74\times75\times76\times77\times78\times79 = 200.133.133.200$ (che comporta $a = 2$ e $c = 1$).

11. I quadrati

Un quadrato Q_0 di lato 3 viene coperto da un quadrato Q_1 (diverso da Q_0) i cui lati contengano ciascuno un vertice di Q_0. La stessa cosa viene fatta coprendo Q_1 con un quadrato Q_2 (diverso da Q_1) i cui lati contengano ciascuno un vertice di Q_1. Si procede così alcune volte rispettando questa regola fino ad ottenere un quadrato Q_n. Se si scelgono in modo opportuno i quadrati successivi a Q_0, qual è il più piccolo valore di n tale che la lunghezza del lato di Q_n superi 2022?

Risposta: 0019. Sol. Per fare in modo che il lato del quadrato Q_{k+1} sia il più lungo possibile rispetto a quello del quadrato Q_k occorre evidentemente che i vertici di Q_k cadano nei punti medi dei lati di Q_{k+1}. In questo caso il rapporto tra il maggiore e il minore dei due lati è $\sqrt{2}$, per cui, se si opera sempre questa scelta, passando da Q_k a Q_{k+2} la lunghezza del lato raddoppia e il lato di Q_{2k} è lungo 2^k volte il lato di Q_0. Si ha $2^9 \times 3 = 1.536$ e $\sqrt{2} > 1{,}4$. Si ha$1.536 \times 1{,}4 > 2.022$, dunque il più piccolo valore di n è 19.

12. Fibonacci

La successione di numeri interi detta “di Fibonacci” è definita nel modo seguente: i primi due termini sono entrambi 1, dal terzo in poi ogni termine è la somma dei due che lo precedono. Quanti dei primi 2023 termini della successione di Fibonacci danno resto 2 quando vengono divisi per 3?

Risposta: 0759. Sol. Costruiamo la successione dei resti di Fibonacci nella divisione per 3: 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, … (il resto di ogni termine è la somma dei due resti precedenti "modulo 3" nel senso che se la somma $a + b$ dei due resti è maggiore di 2 si deve ancora dividere $a + b$ per 3, determinando il resto). È chiaro che è periodica di periodo 8; in ognuno dei 2024:8 = 253 blocchi da 8 ci sono tre 2: in totale 2 compare 759 volte (posso scrivere 2024 invece di 2023 poiché l'ultimo elemento del blocco non è 2).

13. La pedina

Una pedina è posta nella prima casella in alto a sinistra di una scacchiera 8 × 8 (casella (1, 1)) e deve raggiungere l'ultima casella in basso a destra della scacchiera (casella (8, 8)). Ogni mossa consiste nello spostare la pedina da ogni casella in cui si trovi in una casella adiacente, cioè che condivida con essa un lato. Quanti sono i diversi percorsi che richiedono il minor numero possibile di mosse?

Risposta: 3432. Sol. Per minimizzare il numero di mosse, chiaramente occorre muoversi solo da sinistra a destra o dall'alto verso il basso. Basta allora riportare in ogni casella il numero di percorsi che, rispettando questo vincolo, consentono di raggiungere la casella stessa dalla casella (1, 1). Si ottiene una matrice simmetrica in cui i numeri nelle caselle della prima riga e della prima colonna sono tutti 1 e i numeri nelle altre sono, per ogni singola casella, la somma del numero nella casella adiacente a sinistra con il numero nella casella adiacente in alto.

14. Progressioni aritmetiche

Su due progressioni aritmetiche a ragione intera si hanno solo le seguenti informazioni. Una ha come ragione 76, l'altra ha come termine iniziale 20, il primo termine comune ad entrambe è 95. In dipendenza dalle informazioni mancanti, si aprono diverse possibilità per il secondo termine comune. Qual è la somma di tutti questi secondi possibili termini comuni?

Risposta: 9994. Sol. La ragione r della seconda può essere 1 o 3 o 5 o 15 o 25 o 75. Il numero 76 è primo con ognuno di quelli elencati, quindi i termini comuni alle due progressioni hanno la forma $95 + 76 \times r$ al variare della ragione r. La somma delle possibili ragioni r è 124. Allora la somma dei secondi possibili termini comuni è $76 \times 124 + 95 \times 6$.

15. Il sindaco

In un paese vivono 2.023 persone e una di esse è il sindaco. Comunque si scelgano due abitanti diversi dal sindaco, essi hanno un diverso numero di amici fra gli abitanti del paese (è sottointeso che, fra gli amici di un abitante, va escluso egli stesso e che, se A è amico di B, B è amico di A). Quanti amici ha il sindaco? (*Scrivete* 9999 *se ritenete che la risposta non sia univocamente determinata*.)

Risposta: 1011. Sol. L'insieme dei numeri di amici degli abitanti che non sono il sindaco è l'insieme degli interi fra 0 e 2.022 inclusi privato di uno: poiché 0 e 2.022 non possono coesistere (se ciò accadesse, qualche abitante dovrebbe averne 2.022, ma allora ognuno avrebbe almeno un amico), si tratta di scegliere tra l'intervallo [0, 2.021] e l'intervallo [1, 2.022]. In entrambi i casi, la persona che ha più amici (2.021 o 2.022) è amico del sindaco, quello che ne ha di meno (0 o 1) non lo è. Ora allontaniamo queste due persone (nessuna delle quali è il sindaco) dal paese: ogni persona rimasta vede diminuire di 1 il numero dei propri amici e la condizione sulla diversità dei numeri degli amici è rispettata. Ripetiamo la considerazione e l'operazione fino ad eliminare tutte le 1.011 coppie di abitanti diversi dal sindaco: ogni coppia è formata da un amico del sindaco e da un abitante che non lo è, quindi il sindaco ha esattamente 1.011 amici (e la risposta è univocamente determinata).