Kangourou della Matematica 2023
Coppa Junior a squadre
Finale 1
Cervia, 3 maggio 2023

Quesiti

1. Multiplo di 5
Per quanti numeri interi n compresi fra -2023 e 2023 è vero che $1 + 4 \times n$ è un multiplo di 5?

2. I perimetri
Due triangoli sono simili, ma non congruenti. Per ciascuno dei due, due dei lati hanno lunghezze 12 e 18. Quanto vale la somma dei loro perimetri?

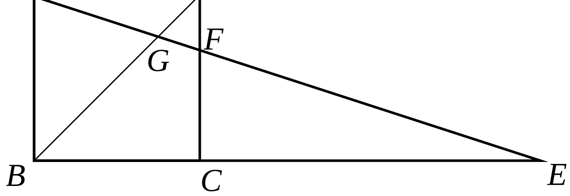
3. Numero medio
Per ogni numero intero di 3 cifre (quindi con la cifra delle centinaia diversa da 0), considerate i cinque numeri che si ottengono permutando le sue cifre (ad esempio, per il numero 120, i cinque numeri da considerare sono: 102, 210, 201, 012 e 021; invece per il numero 121 sono: 211, 211, 121, 112 e 112, in questo caso non tutti distinti e uno uguale al numero considerato).
Il numero considerato sarà detto MEDIO se è la media degli altri cinque. Quanto vale la somma di tutti i numeri MEDI?

4. Quattro assi
Da un mazzo di 52 carte da gioco ne vengono levate alcune, ma nessuno dei quattro assi che quindi rimangono nel mazzo. A questo punto la probabilità che, estraendo 4 carte da quelle rimaste, vengano estratti proprio i quattro assi è 1/1.001. Quante carte sono state levate dal mazzo?

5. Il cubo
Di un numero intero positivo n, si sa che vi sono esattamente 2.023 numeri naturali minori o uguali a n il cui cubo termina con la cifra 1. Qual è il massimo valore possibile per $n/10$?

6. Il ragno
Su un campanile c'è un grande orologio circolare tradizionale. Muovendosi a velocità costante sul suo bordo, alle 06:00 un ragno parte in verso anti-orario in corrispondenza della punta della lancetta delle ore, raggiunge la punta della lancetta dei minuti, inverte il verso di marcia e raggiunge, muovendosi ora in verso orario, per la seconda volta la punta della lancetta dei minuti dopo 20 minuti dalla prima volta. A che ora? (*Scrivete la risposta usando solo* 4 *cifre, senza i due punti: ad esempio per le* 07:56 *scrivete* 0756.)

7. Il segmento *FE*
Osservate la figura. *ABCD* è un quadrato, il segmento *AG* è lungo 81 e il segmento *GF* è lungo 27. Quanto è lungo il segmento *FE*?



8. Divisori diversi
Fra i numeri interi (positivi) di tre cifre, uno solo, chiamiamolo n, ha il maggior numero di divisori tutti diversi fra loro. Quanto vale n?

9. *ANCONA*
Sopprimendo almeno una lettera, ma non tutte, dalla parola *ANCONA*, e lasciando inalterato l'ordine delle lettere rimanenti, quanti diversi allineamenti di lettere si possono ottenere? (Ad esempio, *A*, *NCO*, *ACOA* sono tre di questi allineamenti.)

10. Sei interi consecutivi
Un numero intero di 10 cifre è il prodotto di sei interi positivi consecutivi ed è il più grande intero di 10 cifre che gode di questa proprietà. Qual è il più piccolo dei sei interi consecutivi?

11. Un'uguaglianza
Per quante coppie (ordinate) (x, y) di numeri interi relativi è soddisfatta l'uguaglianza

$$10xy - x^2 - 9y^2 = 2023?$$

12. Divisibile per 75
Esistono numeri interi positivi divisibili per 75 che hanno esattamente 75 divisori (positivi). Sia n il più piccolo di essi. Quanto vale n / 100?

13. I tasselli
Sul prezzo base di 50 centesimi per un tassello, un negozio di ferramenta pratica uno sconto del 5% a chi ne compra meno di 36, uno sconto del 12% a chi ne compra un numero compreso tra 36 e 55 (inclusi), uno sconto del 20% a chi ne compra almeno 56. Ieri ho comprato alcuni di questi tasselli e ho ottenuto uno sconto del 5%; oggi ne ho comprati altri e ho ottenuto uno sconto del 12%. Se avessi comprato quelli di oggi insieme a quelli di ieri, avrei ottenuto uno sconto del 20% risparmiando 3 euro e 90 centesimi. Quanti tasselli ho comprato oggi?

14. Il prelievo
Sul conto in banca di Cesare ci sono 250 euro. Su quel conto Cesare può operare quante volte vuole, ma senza andare in rosso e solo in due modi: prelevare 150 euro o depositarne 99. In questo momento Cesare non ha altro denaro disponibile. Quanti euro può arrivare ad ottenere al massimo dal conto?

15. L'area di *T*
I lati AB e AC di un triangolo acutangolo T misurano rispettivamente 15 e 13 cm. Detto D il piede dell'altezza condotta dal vertice A al lato BC, l'area del triangolo ADC vale 30 cm^2. Sapendo che l'area di T è espressa da un numero intero di centimetri quadrati, quanto vale?

Quesiti e soluzioni

1. Multiplo di 5

Per quanti numeri interi n compresi fra – 2023 e 2023 è vero che $1 + 4 \times n$ è un multiplo di 5?

Risposta: 0809. Sol. Se n è positivo, la cifra delle unità di n deve essere 1 oppure 6: allora in ogni centinaia "positiva" vi sono 20 numeri ammissibili, mentre fra 2001 e 2023 ve ne sono solo 5. Se n è negativo, la cifra delle unità di n deve essere 4 oppure 9: allora anche in ogni centinaia "negativa" vi sono 20 numeri ammissibili, mentre fra – 2023 e – 2001 ve ne sono solo 4.

2. I perimetri

Due triangoli sono simili, ma non congruenti. Per ciascuno dei due, due dei lati hanno lunghezze 12 e 18. Quanto vale la somma dei loro perimetri?

Risposta: 0095. Sol. Se 12, 18 e x sono le lunghezze dei lati di uno dei due triangoli, siano a, b e c le corrispondenti lunghezze dei lati dell'altro nell'ordine dato dalla similitudine; due di queste ultime devono essere 12 e 18. Non può essere $a = 12$, altrimenti i triangoli sarebbero congruenti. Due sono le possibilità. La prima: $a = 18$, che implica $b = 27$, $c = 12$ da cui $x = 8$. La seconda: $c = 18$, che implica $b = 12$ da cui $a = 8$ e $x = 27$. In entrambi i casi la somma dei perimetri vale 95.

3. Numero medio

Per ogni numero intero di 3 cifre (quindi con la cifra delle centinaia diversa da 0), considerate i cinque numeri che si ottengono permutando le sue cifre (ad esempio, per il numero 120, i cinque numeri da considerare sono: 102, 210, 201, 012 e 021; invece per il numero 121 sono: 211, 211, 121, 112 e 112, in questo caso non tutti distinti e uno uguale al numero considerato).
Il numero considerato sarà detto MEDIO se è la media degli altri cinque. Quanto vale la somma di tutti i numeri MEDI?

Risposta: 7992. Sol. Denoto il generico numero MEDIO con $100a + 10b + c$, dove $a > 0$. Deve risultare $500a + 50b + 5c = 122a + 212b + 221c$ ovvero $378a = 162b + 216c$ che si riduce facilmente a $7a = 3b + 4c$. Come è ovvio, sono soluzioni tutti i numeri con 3 cifre uguali (la cui somma è $111 \times 45 = 4995$). Sono inoltre soluzioni tutti i numeri che soddisfano l'equazione $3(a – b) = 4(c – a)$.
Quindi $a = b + 4h$ e $c = a + 3h = b + 7h$. Tenuto conto che le incognite sono cifre, si vede che:
per $b = 0, 1, 2$ e $h = 1$ si ottiene 407, 518, 629, che hanno somma 1554.
per $b = 7, 8, 9$ e $h = – 1$ si ottiene 370, 481, 592, che hanno somma 1443.
In tutto: 4995 + 1554 + 1443 = 7992.

4. Quattro assi

Da un mazzo di 52 carte da gioco ne vengono levate alcune, ma nessuno dei quattro assi che quindi rimangono nel mazzo. A questo punto la probabilità che, estraendo 4 carte da quelle rimaste, vengano estratti proprio i quattro assi è 1/1.001. Quante carte sono state levate dal mazzo?

Risposta: 0038. Sol. Se n è il numero delle carte rimaste, con esse si possono comporre $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) / 24$ quaterne (non ordinate). Una sola di esse è quella formata dai quattro assi. Si deve avere dunque $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) / 24 = 1.001$. Da $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) = 2 \times 12 \times 7 \times 11 \times 13$ segue facilmente $n = 14$.

5. Il cubo

Di un numero intero positivo n, si sa che vi sono esattamente 2.023 numeri naturali minori o uguali a n il cui cubo termina con la cifra 1. Qual è il massimo valore possibile per $n/10$?

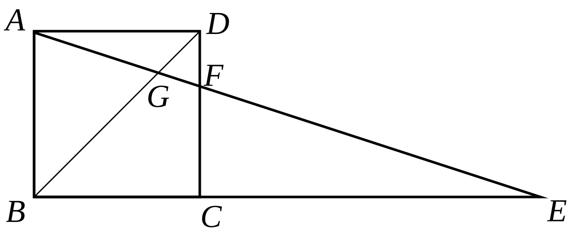
Risposta: 2023. Sol. Il cubo di un numero naturale termina con la cifra 1 se e solo se il numero stesso termina con la cifra 1. In ogni centinaia di interi consecutivi vi sono esattamente 10 interi la cui ultima cifra è 1. Fino a 20.200 vi sono 2.020 di tali interi, dunque il più piccolo valore possibile per n è 20.221, il più grande 20.230.

6. Il ragno

Su un campanile c'è un grande orologio circolare tradizionale. Muovendosi a velocità costante sul suo bordo, alle 06:00 un ragno parte in verso anti-orario in corrispondenza della punta della lancetta delle ore, raggiunge la punta della lancetta dei minuti, inverte il verso di marcia e raggiunge, muovendosi ora in verso orario, per la seconda volta la punta della lancetta dei minuti dopo 20 minuti dalla prima volta. A che ora? (*Scrivete la risposta usando solo* 4 *cifre, senza i due punti: ad esempio per le* 07:56 *scrivete* 0756.)

Risposta: 0626. Sol. Sia L la lancetta dei minuti. Negli ultimi 20 minuti L descrive un settore di 120 gradi, il ragno un settore di 480 gradi: allora la velocità angolare del ragno è 4 volte quella di L. Detta x l'ampiezza in gradi del settore descritto da L fino al primo incontro con il ragno, deve essere allora $4x = 180 - x$, da cui $x = 36$. Allora il settore descritto complessivamente da L fino al secondo incontro con il ragno ha ampiezza 120 + 36 = 156 gradi che corrispondono a 26 minuti.

7. Il segmento *FE*



Osservate la figura. $ABCD$ è un quadrato, il segmento AG è lungo 81 e il segmento GF è lungo 27. Quanto è lungo il segmento FE?

Risposta: 0216. Sol. I triangoli AGB e FGD sono simili con rapporto di similitudine 3 : 1; allora FD (che corrisponde a AB) è lungo 1/3 di DC e dunque 1/2 di FC. Ma anche i triangoli AFD e EFC sono simili, dunque con rapporto di similitudine 1 : 2; allora AF, che corrisponde a FE ed è lungo 81 + 27 = 108, è lungo la metà di FE.

8. Divisori diversi

Fra i numeri interi (positivi) di tre cifre, uno solo, chiamiamolo n, ha il maggior numero di divisori tutti diversi fra loro. Quanto vale n?

Risposta: 0840. Sol. Chiamiamo M il maggior numero dei fattori di n tutti diversi fra loro. Poiché $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ supera 1.000, i fattori primi di n possono essere al massimo quattro. Se ne ha uno solo, non può che essere $n = 2^9$ da cui $M = 10$. Se ne ha esattamente due, non può che essere $n = 2^5 \times 3^3$ da cui $M = 24$. Se ne ha esattamente tre, non può che essere $n = 2^4 \times 3^2 \times 5$ da cui $M = 30$. Se ne ha esattamente quattro, non può che essere $n = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, da cui $M = 32$.

9. *ANCONA*

Sopprimendo almeno una lettera, ma non tutte, dalla parola *ANCONA*, e lasciando inalterato l'ordine delle lettere rimanenti, quanti diversi allineamenti di lettere si possono ottenere? (Ad esempio, *A*, *NCO*, *ACOA* sono tre di questi allineamenti.)

Risposta: 0057. Sol. Le possibili soppressioni sono $2^6 - 2$, ma alcune di esse danno luogo allo stesso allineamento, che dunque viene contato due volte. Questi allineamenti sono *A*, *N*, *ANA*, *AN* e *NA*, quindi sono 5.

10. Sei interi consecutivi

Un numero intero di 10 cifre è il prodotto di sei interi positivi consecutivi ed è il più grande intero di 10 cifre che gode di questa proprietà. Qual è il più piccolo dei sei interi consecutivi?

Risposta: 0043. Sol. Chiaramente basta indagare fra gli interi positivi. Sia N l'intero di 10 cifre in questione. Se n è il più piccolo dei sei interi consecutivi, deve essere $N < (n + 5)^6$. Facilmente si ottiene che il più grande intero minore della radice sesta di 10^{10} (il più piccolo numero di 11 cifre), cioè della radice terza di 10^5, è 46: ne segue che deve essere $n \geq 41$. Una facile verifica diretta porta a $n = 43$.

11. Un'uguaglianza

Per quante coppie (ordinate) (x, y) di numeri interi relativi è soddisfatta l'uguaglianza

$$10xy - x^2 - 9y^2 = 2023?$$

Risposta: 0012. Sol. L'uguaglianza può essere riscritta come $(x - y)(9y - x) = 2023 = 7 \times 17^2$. Per sveltire i calcoli si può osservare che se una coppia è soluzione, i due suoi elementi devono avere lo stesso segno e anche quella di segno opposto lo è. Le possibili coppie di fattori interi positivi di 2023 sono (7, 289), (119, 17), (2023, 1) e ciascuna di esse genera due coppie di interi positivi che risolvono l'equazione.

Da (7, 289) con facili calcoli seguono le coppie soluzioni (44, 37) e (326, 37), da (119, 17) le coppie soluzioni (34, 17) e (136, 17), da (1, 2023) le coppie soluzioni (254, 253) e (2276, 253).

12. Divisibile per 75

Esistono numeri interi positivi divisibili per 75 che hanno esattamente 75 divisori (positivi). Sia n il più piccolo di essi. Quanto vale n / 100?

Risposta: 0324. Sol. Si ha $75 = 3 \times 5^2$. Per minimizzare n dobbiamo imporre che i suoi divisori primi siano i più piccoli possibili: occorre quindi considerare anche 2 e, poiché 75 ha due divisori primi distinti, non occorre considerarne altri. Se a, b e c sono interi positivi, i divisori di $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ sono in numero di $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$. Questo prodotto deve uguagliare 3×5^2: allora conviene porre $a = b = 4$ e $c = 2$, che porta a $n = 32.400$.

13. I tasselli

Sul prezzo base di 50 centesimi per un tassello, un negozio di ferramenta pratica uno sconto del 5% a chi ne compra meno di 36, uno sconto del 12% a chi ne compra un numero compreso tra 36 e 55 (inclusi), uno sconto del 20% a chi ne compra almeno 56. Ieri ho comprato alcuni di questi tasselli e ho ottenuto uno sconto del 5%; oggi ne ho comprati altri e ho ottenuto uno sconto del 12%. Se avessi comprato quelli di oggi insieme a quelli di ieri, avrei ottenuto uno sconto del 20% risparmiando 3 euro e 90 centesimi. Quanti tasselli ho comprato oggi?

Risposta: 0045. Sol. Siano x il numero dei tasselli acquistati ieri e y quello dei tasselli acquistati oggi. Complessivamente ho speso $50 \times (95x + 88y)/100$ centesimi, acquistando tutto ieri ne avrei spesi $(80/100) \times 5(x + y) = 4(x + y)$: ne segue che deve essere $15x + 8y = 780$. Occorre trovare le coppie ordinate di interi positivi che risolvono tale equazione rispettando il vincolo $36 \leq y \leq 55$, da cui $23 \leq x \leq 32$. Poiché 780 è divisibile per 4, lo stesso deve accadere per $15x$, dunque per x. Allora occorre esaminare solo i casi $x = 24$, $x = 28$, $x = 32$, ottenendo facilmente che solo il secondo è accettabile. Ne segue $y = 45$.

14. Il prelievo

Sul conto in banca di Cesare ci sono 250 euro. Su quel conto Cesare può operare quante volte vuole, ma senza andare in rosso e solo in due modi: prelevare 150 euro o depositarne 99. In questo momento Cesare non ha altro denaro disponibile. Quanti euro può arrivare ad ottenere al massimo dal conto?

Risposta: 0249. Sol. Il massimo comune divisore di 150 e 99 è 3: allora innanzitutto ogni somma ottenibile deve essere un multiplo di 3. Il più grande multiplo di 3 che non supera 250 è 249, ed è effettivamente ottenibile. Prelevando 150 euro e depositandone 99 (nell'ordine) per due volte consecutive e aggiungendo infine un ulteriore deposito, Cesare si ritrova con 3 euro in mano. Ripetendo altre 15 volte questa cinquina di operazioni, Cesare si ritrova con 48 euro in mano, dunque con 202 euro sul conto. Ora può prelevarne 150, depositarne 99 e prelevarne nuovamente 150: sul suo conto resta 1 euro.

15. L'area di *T*

I lati AB e AC di un triangolo acutangolo T misurano rispettivamente 15 e 13 cm. Detto D il piede dell'altezza condotta dal vertice A al lato BC, l'area del triangolo ADC vale 30 cm^2. Sapendo che l'area di T è espressa da un numero intero di centimetri quadrati, quanto vale?

Risposta: 0084. Sol. Posto $|AD| = h$, $|BD| = x$ e $|DC| = y$, si deve avere $hy = 60$ e $h^2 + y^2 = 169$. Allora per la coppia ordinata $\{h, y\}$ sono possibili solo le scelte $\{5, 12\}$ e $\{12, 5\}$. Ma $h = 5$ porterebbe ad un valore di x tale da rendere non intera l'area di T, poiché si avrebbe $x^2 = 200$. Invece $h = 12$ porta a $x = 9$, accettabile.