Kangourou della Matematica 2023
finale nazionale italiana
Cervia, 23 settembre 2023

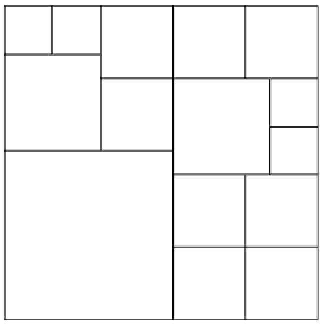
LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (*5 punti*) Ho a disposizione una gran quantità di oggetti di ciascuno dei seguenti pesi: 1, 2, 3, 4 e 5 chili. Con questi ho composto un insieme S contenente oggetti di almeno tre pesi diversi: il peso medio degli oggetti di S è un numero intero di chili. Il peso medio degli oggetti di S rimarrebbe comunque un numero intero di chili se sostituissi ogni oggetto di S che pesi 2, 3 o 4 chili, rispettivamente con un oggetto che pesi 1, 2 o 3 chili, senza compiere ulteriori sostituzioni. Qual è il peso medio degli oggetti di S?

J2. (*7 punti*) Andrea e Giulio giocano a dadi nel modo seguente. Insieme lanciano sei dadi (tradizionali, equi): se esce 3 su almeno un dado, Andrea guadagna un euro da Giulio; in caso contrario, Giulio guadagna due euro da Andrea. È un gioco equo o è vantaggioso per uno dei due? In questo secondo eventuale caso, per chi?

J3. (*11 punti*) Un'isola è ripartita in 15 regioni come indicato nella figura. In ogni regione vive uno e un solo abitante che o dice sempre la verità o mente sempre. Ogni abitante afferma: "*Tra i miei vicini c'è almeno una persona che mente sempre*". Quanti possono essere al massimo gli abitanti che mentono sempre? (Due abitanti si intendono vicini quando le loro regioni condividono un segmento del loro bordo, non necessariamente un intero lato di una delle due.)



J4. (*14 punti*) Osserva la figura.

Il segmento AK è lungo 5, il lato del quadrato $ABCD$ è lungo 1 e il punto P è il punto medio dal lato AB. Facciamo ruotare il quadrato con perno nel vertice B fino a quando il vertice C viene a cadere (per la prima volta) sul segmento AK; a partire da questa posizione del quadrato, eseguiamo ora la stessa operazione con perno in C e così via fino a che il lato AB torna ad essere contenuto (per la prima volta dopo la prima rotazione) nel segmento AK. Fornisci un disegno qualitativo della traiettoria del punto P che possa chiarire come è stata determinata e calcolane la lunghezza.

J5. (*18 punti*) Siano n un numero intero con $0 \leq n < 40$ e p un numero primo superiore a 5 tali che $p^2 + n$ sia divisibile per 40. Mostrare che n può assumere solo due valori e specificare quali.

J6. (*22 punti*) Sono assegnati n punti distinti nel piano ($n \geq 2$). Dimostra che, al variare di n, il numero delle coppie di tali punti che realizzano la massima distanza possibile è al massimo n e può essere n.

LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

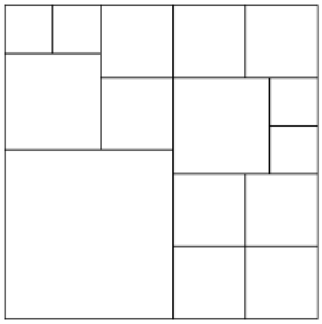
J1. (*5 punti*) Ho a disposizione una gran quantità di oggetti di ciascuno dei seguenti pesi: 1, 2, 3, 4 e 5 chili. Con questi ho composto un insieme *S* contenente oggetti di almeno tre pesi diversi: il peso medio degli oggetti di *S* è un numero intero di chili. Il peso medio degli oggetti di *S* rimarrebbe comunque un numero intero di chili se sostituissi ogni oggetto di *S* che pesi 2, 3 o 4 chili, rispettivamente con un oggetto che pesi 1, 2 o 3 chili, senza compiere ulteriori sostituzioni. Qual è il peso medio degli oggetti di *S*?

Risposta: 3 kg.
Svolgimento. Poiché in *S* ci sono oggetti di almeno tre pesi diversi, non possono esserci solo oggetti da 1 o 5 chili, quindi almeno un oggetto dovrebbe essere sostituito, facendo calare il peso medio. Tale calo non può essere inferiore a 1 chilo, dato che il peso medio dopo la sostituzione è un numero intero di chili, ma neppure superiore, visto che nessuno dei nuovi oggetti ha un peso inferiore a quello degli oggetti di partenza di più di 1 chilo. Ciò significa che ciascun oggetto di *S* dovrebbe essere sostituito con uno di un chilo inferiore: allora non possono esserci oggetti da 1 o 5 chili. Il peso medio degli oggetti di *S*, non potendo essere uguale al peso minimo o massimo di uno dei suoi oggetti, deve essere esattamente di 3.
Osservazione: affinché la situazione descritta si verifichi, (occorre e) basta che sia uguale il numero di oggetti da 2 e da 4 chili: $\frac{2m+3n+4m}{2m+n} = 3$.

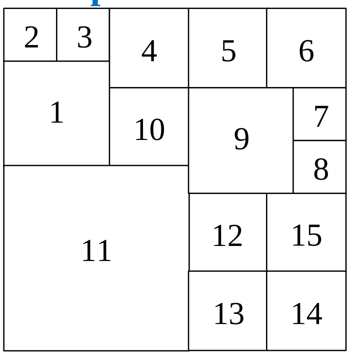
J2. (*7 punti*) Andrea e Giulio giocano a dadi nel modo seguente. Insieme lanciano sei dadi (tradizionali, equi): se esce 3 su almeno un dado, Andrea guadagna un euro da Giulio; in caso contrario, Giulio guadagna due euro da Andrea. È un gioco equo o è vantaggioso per uno dei due? In questo secondo eventuale caso, per chi?

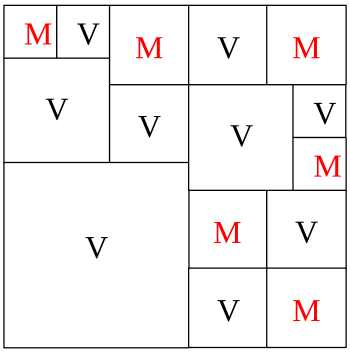
Svolgimento. Affinché il gioco sia equo, occorre che la probabilità che non esca alcun 3 sia 1/3. In realtà tale probabilità è $(5/6)^6$ che è maggiore di 1/3: infatti (calcolo non lungo) $3 \times 5^6 = 46.875 > 46.656 = 6^6$. Dunque Giulio è leggermente favorito.

J3. (*11 punti*) Un’isola è ripartita in 15 regioni come indicato nella figura. In ogni regione vive uno e un solo abitante che o dice sempre la verità o mente sempre. Ogni abitante afferma: “*Tra i miei vicini c’è almeno una persona che mente sempre*”. Quanti possono essere al massimo gli abitanti che mentono sempre? (Due abitanti si intendono vicini quando le loro regioni condividono un segmento del loro bordo, non necessariamente un intero lato di una delle due.)



Risposta: 6.



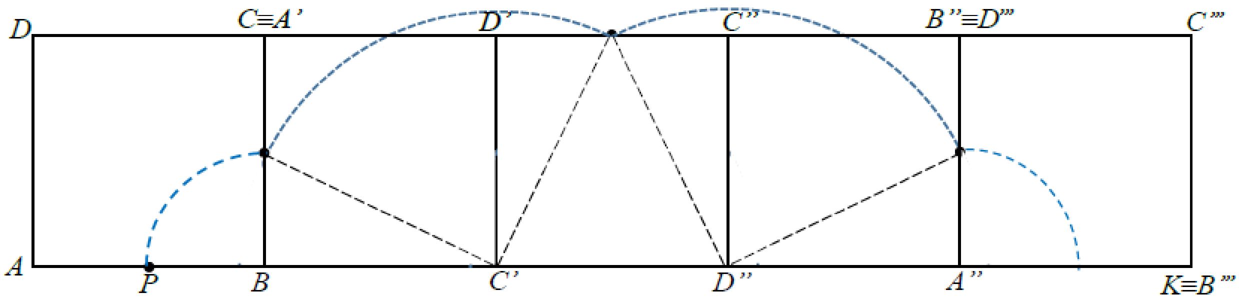


Svolgimento. Numeriamo le regioni come indicato nella figura a sinistra. Due regioni “vicine” non possono contenere entrambe un mentitore. Quindi in ognuna delle tre terne {1, 2, 3}, {7, 8, 9} e {11,12,13} può esserci al più un mentitore, e così pure in ognuna delle tre coppie {4,10}, {5, 6} e {14, 15}. Allora i mentitori non possono essere più di 6. La seconda figura mostra una possibile situazione con 6 mentitori.

J4. (*14 punti*) Osserva la figura.

Il segmento *AK* è lungo 5, il lato del quadrato *ABCD* è lungo 1 e il punto *P* è il punto medio dal lato *AB*. Facciamo ruotare il quadrato con perno nel vertice *B* fino a quando il vertice *C* viene a cadere (per la prima volta) sul segmento *AK*; a partire da questa posizione del quadrato, eseguiamo ora la stessa operazione con perno in *C* e così via fino a che il lato *AB* torna ad essere contenuto (per la prima volta dopo la prima rotazione) nel segmento *AK*. Fornisci un disegno qualitativo della traiettoria del punto *P* che possa chiarire come è stata determinata e calcolane la lunghezza.

Risposta: Traiettoria di P in blu, lunghezza $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{5})$.



Svolgimento. La figura rappresenta le posizioni del quadrato al termine delle singole rotazioni di 90 gradi. I tre punti di saldatura degli archi sono i punti medi dei lati su cui giacciono, i primi due segmenti tratteggiati sono ortogonali, e così pure i rimanenti due. La traiettoria è dunque costituita da due quarti di circonferenza di lunghezza $\pi/4$ ciascuno e da due quarti di circonferenza di lunghezza $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}$ ciascuno.

J5. (*18 punti*) Siano n un numero intero con $0 \leq n < 40$ e p un numero primo superiore a 5 tali che $p^2 + n$ sia divisibile per 40. Mostrare che n può assumere solo due valori e specificare quali.

Risposta: n = 39 oppure n = 31, con entrambi i casi possibili.
Svolgimento. Ogni intero positivo è esprimibile in una delle forme $10k \pm i$ con k intero non negativo e i nell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ opportuni, dunque ogni numero primo p è esprimibile in una delle forme $10k \pm 1$ oppure $10k \pm 3$ con k intero non negativo opportuno e tutti e quattro i casi sono possibili (es. $p = 19$, $p = 11$, $p = 13$ e $p = 7$). Si ha allora $p^2 = 20k(5k \pm 1) + 1$ oppure $p^2 = 20k(5k \pm 3) + 9$. Poiché sia $k(5k \pm 1)$ sia $k(5k \pm 3)$ sono interi pari, il resto della divisione di p^2 per 40 può essere 1 oppure 9, da cui la tesi.

J6. (*22 punti*) Sono assegnati n punti distinti nel piano ($n \geq 2$). Dimostra che, al variare di n, il numero delle coppie di tali punti che realizzano la massima distanza possibile è al massimo n e può essere n.

Risposta: è al più n, potendo essere n se $n \geq 3$.
Svolgimento. Osserviamo che, se $n = 2$, c'è una sola coppia e quindi il numero di coppie è minore di n. Procediamo per induzione su n da $n = 3$, caso in cui la risposta è ovviamente vera.
Sia vero che, con $n - 1$ punti, le coppie non sono più di $n - 1$. Se nessuno degli n punti è estremo di più di due "segmenti massimali" (cioè i cui estremi realizzino la massima distanza possibile), le coppie non possono evidentemente essere più di n.
Esista invece un punto P che è estremo di tre segmenti massimali $[PQ]$, $[PR]$ e $[PS]$.
Osserviamo che, se $[AB]$ e $[CD]$ sono due segmenti massimali, devono necessariamente intersecarsi poiché, in caso contrario, la lunghezza di almeno una delle due diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$ supererebbe quella dei due segmenti.

Tenuto conto di ciò, si può concludere che esiste un punto che è estremo di esattamente un segmento massimale. Infatti, ogni coppia dei tre segmenti massimali [PQ], [PR] e [PS] non può formare un angolo di misura superiore a 60° e quindi uno dei tre deve giacere internamente all'angolo formato dagli altri due.
Allora, se è R ad essere interno all'angolo QPS, per quanto visto sopra non può essere estremo di un segmento massimale diverso da [PR] perché un tale segmento non potrebbe intersecare entrambi gli altri due. Sopprimendo il punto R ci si riporta a $n - 1$ punti, con al più altrettanti segmenti massimali.
Infine, un insieme di n punti con n segmenti massimali può essere costituito dai vertici di un triangolo equilatero e da $n - 3$ punti qualsiasi sull'arco di 60 gradi della circonferenza centrata in uno dei tre vertici avente come estremi gli altri due.