



Kangourou della Matematica 2023
 finale nazionale italiana
 Cervia, 23 settembre 2023



LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

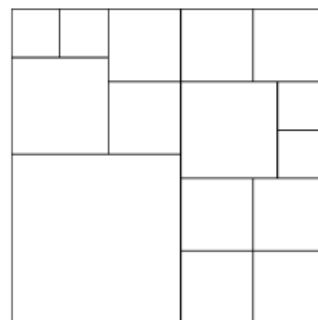
C1. (5 punti) Cinque ragazze e quattro ragazzi hanno partecipato ad una gara dove non erano previste posizioni di pari merito. Il primo posto in classifica è toccato ad una ragazza; sommando i numeri delle posizioni delle ragazze si ottiene il doppio della somma dei numeri delle posizioni dei ragazzi. In che posizione si è classificato l'ultimo dei ragazzi?

C2. (7 punti) Si vogliono collocare alcuni gettoni in altrettante celle quadrate di una griglia 2×9 in modo che ogni cella o contenga un gettone o condivida un lato con qualche cella che contenga un gettone. Qual è il minimo numero di gettoni che consente di raggiungere lo scopo?

C3. (11 punti) Ho a disposizione una gran quantità di oggetti di ciascuno dei seguenti pesi: 1, 2, 3, 4 e 5 chili. Con questi ho composto un insieme S contenente oggetti di almeno tre pesi diversi: il peso medio degli oggetti di S è un numero intero di chili. Il peso medio degli oggetti di S rimarrebbe comunque un numero intero di chili se sostituissi ogni oggetto di S che pesi 2, 3 o 4 chili, rispettivamente con un oggetto che pesi 1, 2 o 3 chili, senza compiere ulteriori sostituzioni. Qual è il peso medio degli oggetti di S ?

C4. (14 punti) Per formare un codice segreto, le 21 lettere dell'alfabeto italiano (dunque senza le lettere K, J, X, Y, W), scritte nell'ordine dell'alfabeto, sono state numerate progressivamente partendo da una lettera che non è necessariamente la A e ricominciando con la A dopo la Z (ad esempio, se la lettera E fosse la numero 1, la F sarebbe la numero 2, la Z la numero 17 e la A la numero 18 fino ad arrivare alla D , la numero 21). La somma dei numeri assegnati alle lettere P, R, T è 24. Il codice (3, 1, 11) corrisponde ad una parola di senso compiuto, cioè presente nel vocabolario italiano: quale?

C5. (18 punti) Un'isola è ripartita in 15 regioni come indicato nella figura. In ogni regione vive uno e un solo abitante che o dice sempre la verità o mente sempre. Ogni abitante afferma: "Tra i miei vicini c'è almeno una persona che mente sempre". Quanti possono essere al massimo gli abitanti che mentono sempre? (Due abitanti si intendono vicini quando le loro regioni condividono un segmento del loro bordo, non necessariamente un intero lato di una delle due.)



C6. (22 punti) Osserva la figura.



Il segmento AK è lungo 5, il lato del quadrato $ABCD$ è lungo 1 e il punto P è il punto medio dal lato AB . Facciamo ruotare il quadrato con perno nel vertice B fino a quando il vertice C viene a cadere (per la prima volta) sul segmento AK ; a partire da questa posizione del quadrato, eseguiamo ora la stessa operazione con perno in C e così via fino a che il lato AB torna ad essere contenuto (per la prima volta dopo la prima rotazione) nel segmento AK . Fornisci un disegno qualitativo della traiettoria del punto P che possa chiarire come è stata determinata e calcolane la lunghezza.



Kangourou della Matematica 2023
finale nazionale italiana
Cervia, 23 settembre 2023



LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (5 punti) Cinque ragazze e quattro ragazzi hanno partecipato ad una gara dove non erano previste posizioni di pari merito. Il primo posto in classifica è toccato ad una ragazza; sommando i numeri delle posizioni delle ragazze si ottiene il doppio della somma dei numeri delle posizioni dei ragazzi. In che posizione si è classificato l'ultimo dei ragazzi?

Risposta: Sesta.

Svolgimento. La somma dei numeri di tutte le posizioni è 45: allora la somma relativa alle ragazze è 30, quella relativa ai ragazzi è 15. Poiché $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, l'unico modo per ottenere 15 è sostituire 5 con 6.

C2. (7 punti) Si vogliono collocare alcuni gettoni in altrettante celle quadrate di una griglia 2×9 in modo che ogni cella o contenga un gettone o condivida un lato con qualche cella che contenga un gettone. Qual è il minimo numero di gettoni che consente di raggiungere lo scopo?

Risposta: 5.

Svolgimento. Una cella che contenga un gettone ne può "sistemare" al massimo altre tre: allora 4 gettoni non possono bastare. Ne bastano 5: per esempio se ne può disporre uno nelle celle 1, 5 e 9 della prima riga e uno nelle celle 3 e 7 della seconda.

C3. (11 punti) Ho a disposizione una gran quantità di oggetti di ciascuno dei seguenti pesi: 1, 2, 3, 4 e 5 chili. Con questi ho composto un insieme S contenente oggetti di almeno tre pesi diversi: il peso medio degli oggetti di S è un numero intero di chili. Il peso medio degli oggetti di S rimarrebbe comunque un numero intero di chili se sostituissi ogni oggetto di S che pesi 2, 3 o 4 chili, rispettivamente con un oggetto che pesi 1, 2 o 3 chili, senza compiere ulteriori sostituzioni. Qual è il peso medio degli oggetti di S ?

Risposta 3 kg.

Svolgimento. Poiché in S ci sono oggetti di almeno tre pesi diversi, non possono esserci solo oggetti da 1 o 5 chili, quindi almeno un oggetto dovrebbe essere sostituito, facendo calare il peso medio. Tale calo non può essere inferiore a 1 chilo, dato che il peso medio dopo la sostituzione è un numero intero di chili, ma neppure superiore, visto che nessuno dei nuovi oggetti ha un peso inferiore a quello degli oggetti di partenza di più di 1 chilo. Ciò significa che ciascun oggetto di S dovrebbe essere sostituito con uno di un chilo inferiore: allora non possono esserci oggetti da 1 o 5 chili. Il peso medio degli oggetti di S , non potendo essere uguale al peso minimo o massimo di uno dei suoi oggetti, deve essere esattamente di 3.

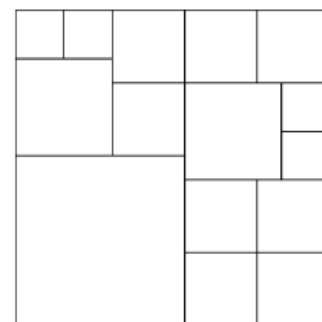
Osservazione: affinché la situazione descritta si verifichi, (occorre e) basta che sia uguale il numero di oggetti da 2 e da 4 chili: $\frac{2m+3n+4m}{2m+n} = 3$.

C4. (14 punti) Per formare un codice segreto, le 21 lettere dell'alfabeto italiano (dunque senza le lettere *K, J, X, Y, W*), scritte nell'ordine dell'alfabeto, sono state numerate progressivamente partendo da una lettera che non è necessariamente la *A* e ricominciando con la *A* dopo la *Z* (ad esempio, se la lettera *E* fosse la numero 1, la *F* sarebbe la numero 2, la *Z* la numero 17 e la *A* la numero 18 fino ad arrivare alla *D*, la numero 21). La somma dei numeri assegnati alle lettere *P, R, T* è 24. Il codice (3, 1, 11) corrisponde ad una parola di senso compiuto, cioè presente nel vocabolario italiano: quale?

Risposta: TRE.

Svolgimento. Se i numeri assegnati a *P, Q, R, S, T* fossero consecutivi, detto *n* il numero assegnato a *P*, dovrebbe essere $3n + 6 = 24$, cioè $n = 6$: ciò comporterebbe $3 = M$, $1 = I$ e $11 = U$, ma *MIU* non è una parola di senso compiuto. Allora a una delle precedenti 5 lettere è stato assegnato il numero 21: facilmente si ricava che questa lettera è la *Q* e si risale alla parola *TRE*, che è di senso compiuto.

C5. (18 punti) Un'isola è ripartita in 15 regioni come indicato nella figura. In ogni regione vive uno e un solo abitante che o dice sempre la verità o mente sempre. Ogni abitante afferma: "Tra i miei vicini c'è almeno una persona che mente sempre". Quanti possono essere al massimo gli abitanti che mentono sempre? (Due abitanti si intendono vicini quando le loro regioni condividono un segmento del loro bordo, non necessariamente un intero lato di una delle due.)



Risposta: 6.

2	3	4	5	6
1		10	9	7
				8
11			12	15
			13	14

M	V	M	V	M
V	V	V	V	V
V		M	V	
		V	M	

Svolgimento. Numeriamo le regioni come indicato nella figura a sinistra. Due regioni "vicine" non possono contenere entrambe un mentitore. Quindi in ognuna delle tre terne {1, 2, 3}, {7, 8, 9} e {11,12,13} può esserci al più un mentitore, e così pure in ognuna delle tre coppie {4,10}, {5, 6} e

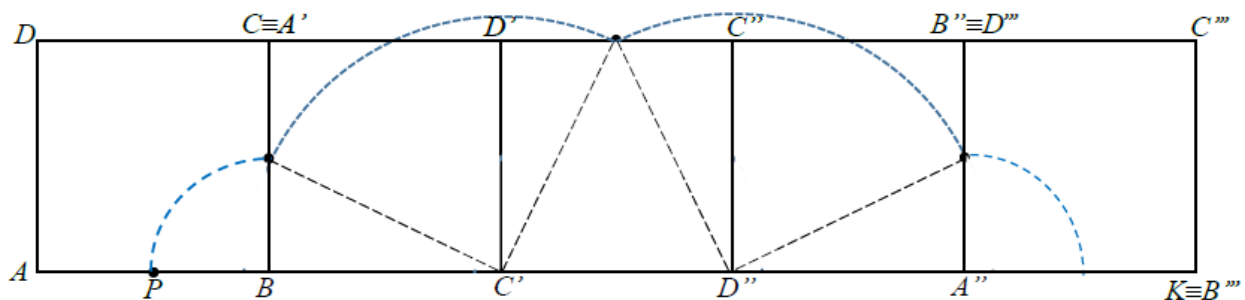
{14, 15}. Allora i mentitori non possono essere più di 6. La seconda figura mostra una possibile situazione con 6 mentitori.

C6. (22 punti) Osserva la figura.



Il segmento AK è lungo 5, il lato del quadrato $ABCD$ è lungo 1 e il punto P è il punto medio dal lato AB . Facciamo ruotare il quadrato con perno nel vertice B fino a quando il vertice C viene a cadere (per la prima volta) sul segmento AK ; a partire da questa posizione del quadrato, eseguiamo ora la stessa operazione con perno in C e così via fino a che il lato AB torna ad essere contenuto (per la prima volta dopo la prima rotazione) nel segmento AK . Fornisci un disegno qualitativo della traiettoria del punto P che possa chiarire come è stata determinata e calcolane la lunghezza.

Risposta: Traiettoria di P in blu, lunghezza $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{5})$.



Svolgimento. La figura rappresenta le posizioni del quadrato al termine delle singole rotazioni di 90 gradi. I tre punti di saldatura degli archi sono i punti medi dei lati su cui giacciono, i primi due segmenti tratteggiati sono ortogonali, e così pure i rimanenti due. La traiettoria è dunque costituita da due quarti di circonferenza di lunghezza $\pi/4$ ciascuno e da due quarti di circonferenza di lunghezza $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}$ ciascuno.