Kangourou della Matematica

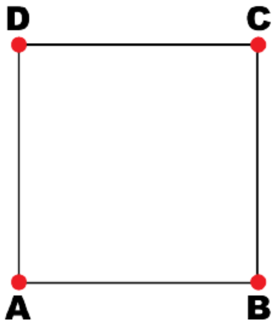
Semifinale individuale

20 maggio 2022

STUDENT

Quesiti a risposta chiusa

1. (2 punti) In figura vedete un quadrato sul bordo del quale Ada e Bice si allenano a correre, ognuna senza mai cambiare verso, ma non sappiamo se nello stesso verso o in verso opposto. Corrono per molti giri ciascuna a velocità costante, ma quella di Ada è il triplo di quella di Bice. In questo momento Ada è sul vertice *A* mentre Bice è sul vertice *B*. Quante delle seguenti affermazioni sono corrette?



- Ada e Bice non si troveranno mai insieme nel vertice *B*.
- Ada e Bice non si troveranno mai insieme nel vertice *C*.
- Ada e Bice non si troveranno mai insieme nel vertice *D*.
- Qualche volta Ada e Bice si troveranno insieme nel vertice *A*.
- Ada e Bice non potranno trovarsi insieme se non in uno dei vertici.

A) 0 (nessuna) **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5 (tutte)

2. (3 punti) Ad un quesito di Kangourou a risposta chiusa come questo, con 5 opzioni per la risposta, hanno risposto 10.000 studenti. Di questi, alcuni hanno saputo determinare la risposta corretta in base alle loro conoscenze, gli altri hanno tirato ad indovinare scegliendo in modo del tutto casuale tra le 5 proposte. Le risposte risultate corrette sono state 3.000. Tra i seguenti numeri, quale è più probabile che sia il numero di coloro che conoscevano la risposta corretta?

A) 3.000 **B)** 2.500 **C)** 1.500 **D)** 1.250 **E)** 1.000

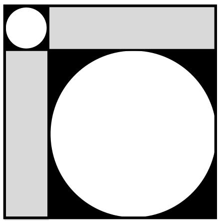
3. (3 punti) Simona scrive un numero intero di quattro cifre, poi leva la sua ultima cifra e la sposta in testa al numero (ad esempio, se il numero scritto fosse 1030 otterrebbe 0103). Ora Simona somma i due numeri così ottenuti: quanti dei seguenti numeri

1221, 8612, 4322, 13859

potrebbero essere il risultato?

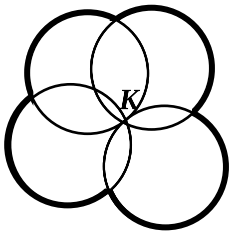
A) 0 (nessuno) **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4 (tutti)

4. **(4 punti)** Nella figura vedi un quadrato ripartito in due rettangoli grigi e due quadrati. I due rettangoli sono congruenti e all'interno di ciascuno dei due quadrati è inscritto un cerchio. In ciascuno dei quadrati, la parte esterna al cerchio è verniciata di nero. L'area della regione in nero è $20(4-\pi)$. Con una configurazione come questa, quanto può valere al massimo l'area di ciascuno dei due rettangoli, al variare dei due raggi?



A) 40 **B)** $40\sqrt{2}$ **C)** 20 **D)** $40 / \pi$ **E)** Nessuno dei numeri proposti.

5. **(4 punti)** La figura mostra quattro circonferenze di raggio 1 con esattamente un punto in comune a tutte. Quanto è lungo il bordo esterno della figura evidenziato dagli archi a tratto nero inspessito?



A) 3π **B)** $3\pi/2$ **C)** $8\pi/3$ **D)** 4π **E)** $11\pi/5$

6. **(4 punti)** Qual è la somma dei possibili valori del parametro a in corrispondenza dei quali le due equazioni

$$x^2 + ax + 2022 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + 2022x + a = 0$$

hanno almeno una soluzione reale in comune?

A) -4045 **B)** -1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 5

7. **(5 punti)** Anna ed Ernesto giocano nel modo seguente. Sul tavolo ci sono n carte coperte numerate da 1 a n. Anna ne gira una e poi Ernesto ne gira un'altra. Si moltiplicano quindi i numeri ottenuti: se il prodotto è un numero pari vince Anna, se è un numero dispari vince Ernesto. Si sa che la probabilità che vinca Anna è del 74%. Quanto vale n?

A) 8 **B)** 12 **C)** 20 **D)** 25 **E)** Nessuno dei valori precedenti.

8. **(5 punti)** Una successione $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ di numeri reali è definita induttivamente nel modo seguente:

$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{{a_n}^2 - 2022\, a_n + 1} \qquad \text{per } n = 1, 2, \ldots .$$

Per quanti valori di a_1 la successione è costante?

A) Infiniti **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

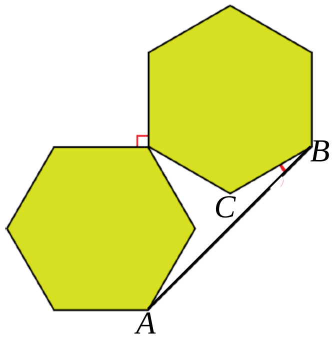
9. (6 punti) Sei persone A, B, C, D, E, F sono in una stanza. Ognuna di esse ha a disposizione cinque cappelli e deve metterne uno sul capo di ogni altra persona della quale non è amica. Tenete presente che se X è amico di Y, vale anche il viceversa. A operazioni concluse, il numero di cappelli sulla testa delle diverse persone sono: 3 su A, 1 su B, 2 su C, 4 su D, 2 su E, 0 (nessuno) su F. Quante delle seguenti affermazioni sono vere?

- C ed E sono amiche;
- F è amica di tutte;
- A è amica di B e di F;
- D è amica di F;
- B non è amica di A;
- C è amica di B e di A.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Quesiti a risposta aperta

10. (4 punti) La figura mostra due esagoni regolari congruenti che hanno in comune solo un vertice. Due dei lati che confluiscono in quel vertice sono perpendicolari. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{ABC}$ indicato?



11. (5 punti) Una piccola macchina calcolatrice può eseguire solo quattro operazioni a scelta su un numero che venga assegnato: sottrarre 1, dividere per 2, moltiplicare per 3, sommare 4. Partendo dal numero 1 ed eseguendo in sequenza una alla volta operazioni come queste sui risultati via via ottenuti, qual è il minimo numero di operazioni che sono sufficienti per raggiungere 2022? (Ad esempio per raggiungere 6 ne occorrono e bastano 3: $1 \times 3 + 4 - 1$.)

12. (5 punti) Chiamiamo *equo* un rettangolo di dimensioni intere $m \times n$ se accade quanto segue: quando viene ripartito in mn quadrati di lato unitario, i quadrati che stanno lungo il bordo sono tanti quanti i rimanenti (cioè quelli che stanno strettamente all'interno). Quanti sono, se ne esistono, i rettangoli equi? (*Un rettangolo $m \times n$ va considerato identico al rettangolo $n \times m$; se ritieni che vi siano infiniti rettangoli equi, rispondi 9999.*)

13. (6 punti) Per quante coppie ordinate (x, y) di interi positivi accade che entrambi gli interi $x^2 + y$ e $x + y^2$ siano quadrati perfetti? (*Scrivete 9999 se ritenete che vi siano infinite coppie.*)

14. (6 punti) Qual è l'ultima cifra decimale diversa da 0 del numero $\frac{1}{5^{2022}}$?

15. (6 punti) Per una terna ordinata di numeri interi $T = \{a, b, c\}$ si ponga $S(T) = a + b + c$. Al variare di tutte le terne ordinate di numeri interi $T = \{a, b, c\}$ tali che

$$a^4 + b^4 = 28 + 2bc \qquad \text{e} \qquad 2ab = 7 + c^4,$$

quanto vale la somma di tutti i numeri $S(T)$?

16. (7 punti) Ogni numero intero positivo di 4 cifre in notazione decimale ha la forma *ABCD*, ove le cifre indicate dalle lettere possono non essere distinte e la cifra *A* è diversa da 0. Quanti sono i numeri interi di 12 cifre della forma *ABCDABCDABCD* divisibili per 2022?

17. (7 punti) Denotate con $\mathcal{P}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti interi che hanno tra le loro radici il numero $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ e tali che il loro grado sia il più basso possibile. Per un polinomio P, denotate con $s(P)$ la somma dei valori assoluti dei coefficienti di P. Qual è il minimo valore possibile per $s(P)$ al variare di P in $\mathcal{P}$?

18. (8 punti) Diciamo che un numero intero positivo n è *perfettone* se coincide con il quadrato del numero dei suoi divisori (interi positivi, 1 e n compresi): ad esempio 4, che ha tre divisori, non è perfettone. Quanti sono i numeri perfettoni?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
C	D	B	A	D	B	D	C	C	15	9	2	0	4	0	13	33	2