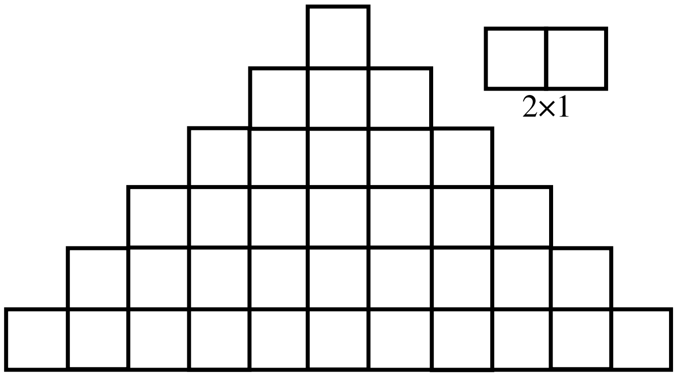
Kangourou della Matematica 2022
finale nazionale italiana
Cervia, 24 settembre 2022

LIVELLO STUDENT

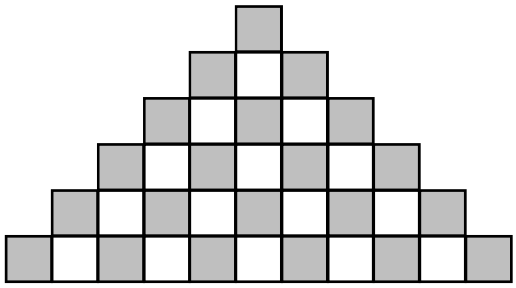
<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

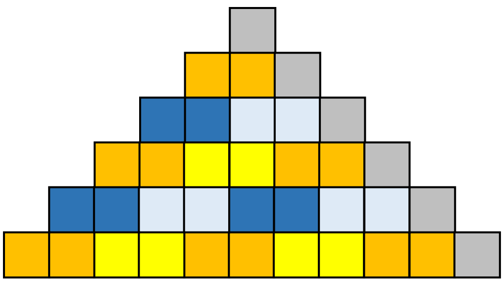
S1. (*5 punti*) In figura vedi una regione di piano ottenuta accostando 36 quadratini tutti uguali fra loro e una tessera ottenuta accostando due quadratini identici a quelli della regione. Quante tessere di questo tipo puoi disporre al massimo nella regione in modo che ognuna copra esattamente due quadratini della regione e non si sovrappongano (neppure parzialmente)? Puoi utilizzare la figura per indicare come disporre le tessere, ma ricorda che devi anche giustificare il motivo per il quale non ne puoi collocare un numero maggiore.



Risposta: 15.

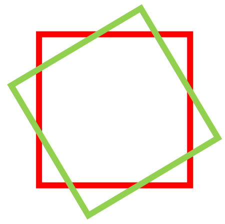
Svolgimento. Immagina di colorare i quadratini della regione alternativamente di bianco e di nero, ad esempio partendo con il quadratino di vertice nero: i quadratini bianchi sarebbero 15, quelli neri 21. Poiché ogni tessera copre un quadratino bianco e uno nero (quadratini adiacenti in orizzontale o in verticale hanno colori diversi), non puoi inserire più di 15 tessere. Puoi inserirne 15, ad esempio come ti mostra la seconda figura.

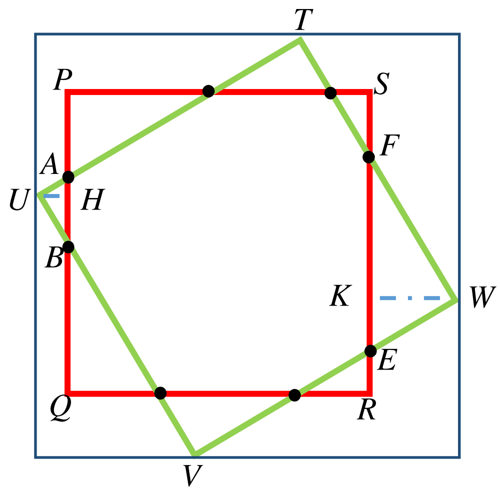




S2. (*7 punti*) Due quadrati congruenti, uno con bordo rosso e l'altro con bordo verde, sono disposti nel piano in modo tale che la loro intersezione sia un ottagono (i centri dei due quadrati possono non coincidere). Dimostra che la somma delle lunghezze dei lati rossi dell'ottagono coincide con la somma delle lunghezze dei lati verdi.

Svolgimento. Se i due quadrati sono concentrici l'affermazione è ovvia per simmetria. In caso contrario si può traslare uno dei due quadrati fino a che i due centri coincidano: per ognuno dei due colori, questa operazione non altera la somma delle lunghezze dei lati di quel colore poiché l'eventuale perdita di lunghezza di un lato è compensata esattamente dal guadagno sul lato opposto dell'ottagono, che è dello stesso colore: si pensi di operare la traslazione in due passi, ciascuno in una delle due direzioni individuate dal quadrato che si lascia fermo. Più esplicitamente si possono descrivere nel dettaglio gli effetti di queste traslazioni. La figura suggerisce che, per esempio, nel caso di traslazione del quadrato *TUVW* nella direzione *QR*, la somma delle lunghezze di *AB* ed *EF* rimane costante in quanto lo è la somma delle distanze *UH*+*WK* (differenza tra il lato del quadrato circoscritto a *TUVW* con lati paralleli a *PQRS* e il lato di quest'ultimo). Analogamente per la direzione *PQ*: quindi la somma delle lunghezze dei lati rossi è costante. In maniera analoga si vede che lo è la somma delle lunghezze dei lati verdi.





S3. (*11 punti*) Considera il numero 2023^{2022} in notazione decimale; leva la sua prima cifra da destra (quella delle unità) e sommala al numero ottenuto con le cifre rimaste. Procedi in questo modo fino ad ottenere un numero di 10 cifre. Dimostra che questo numero che hai ottenuto possiede almeno due cifre uguali.

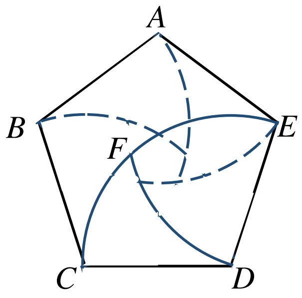
Svolgimento. Il numero 2023^{2022} non è divisibile per 9 (2023 non è divisibile per 3). L'operazione suggerita, che va iterata, non altera modulo 9 la somma delle cifre del numero su cui la si esegue (facile da verificare: o rimane inalterata o diminuisce di 9; si pensi al calcolo del riporto nell'esecuzione dell'addizione). Allora anche il numero finale di 10 cifre non è divisibile per 9: le sue 10 cifre non possono dunque essere tutte diverse fra loro ($0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ è divisibile per 9).

S4. (*14 punti*) Determina l'area della regione luogo dei punti interni ad un pentagono regolare di lato 1 che sono a distanza maggiore di 1 da almeno uno dei vertici.

Risposta: $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$.

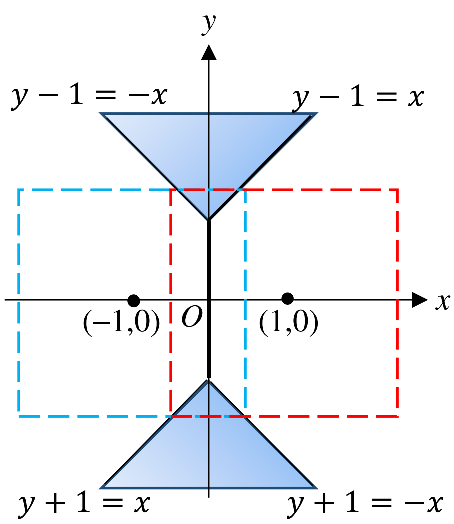
Svolgimento. Il luogo in questione è l'unione di cinque triangoli "mistilinei" congruenti al triangolo *FCD* in figura, dove ogni arco è parte della circonferenza di raggio 1 centrata in uno dei vertici. Gli angoli interni del pentagono misurano ciascuno $\frac{3\pi}{5}$ radianti, quindi l'area del settore circolare *DCE* è $\frac{3\pi}{10}$. D'altra parte, poiché il triangolo *DFE* è equilatero, l'area di ogni settore circolare che abbia centro in un suo vertice è $\frac{\pi}{6}$, mentre l'area del triangolo è $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Allora l'area del triangolo mistilineo *FCD* è $\frac{3\pi}{10} - \left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{30}$.



S5. (*18 punti*) Nel piano dotato di un sistema cartesiano ortogonale monometrico *Oxy*, introduciamo una *nuova nozione di distanza*: la distanza del punto (x, y) dal punto (a, b) è il maggiore fra i numeri $|x-a|$ e $|y-b|$ (che possono coincidere).
L'*asse di un segmento* viene definito, rispetto a questa nuova nozione di distanza, nel modo usuale, cioè come luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.
Descrivi l'asse del segmento di estremi $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ rispetto alla nuova nozione di distanza (NON rispetto alla distanza euclidea).

Svolgimento. La distanza di punti che abbiano la stessa ascissa o la stessa ordinata rimane quella usuale (euclidea). La circonferenza di centro (a, b) e raggio r (rispetto alla nuova distanza) è il bordo del quadrato centrato in (a, b) con i lati di lunghezza $2r$ paralleli agli assi: allora i punti del luogo richiesto sono quelli che, per qualche r, stanno sul bordo di entrambi i quadrati di lato $2r$, con i lati paralleli agli assi e centri nei due punti assegnati (dunque $r \geq 1$).



Nella fascia orizzontale di piano costituita dai punti (x, y) con $|y| \leq 1$, l'asse coincide allora con l'asse rispetto alla metrica euclidea.
Nel semipiano superiore esterno a tale fascia, l'asse coincide con il cono (angolo) analiticamente descritto da $|x| \leq y - 1$; nel semipiano inferiore esterno a tale fascia, l'asse coincide con il cono (angolo) analiticamente descritto da $|x| \leq -y - 1$.

S6. (*22 punti*) Dimostra che è possibile esprimere l'insieme dei numeri interi non negativi come unione $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, dove gli A_n sono sottoinsiemi a due a due disgiunti, ciascuno costituito da infiniti elementi, e tali che, per ogni $n \geq 1$, A_n sia ottenibile sommando una stessa costante, dipendente da n, ad ogni elemento di A_0.

Svolgimento. Sia A <risp. B> l'insieme degli interi non negativi la cui rappresentazione decimale vede la cifra 0 in ogni posizione pari, a partire da destra <risp. vede la cifra 0 in ogni posizione dispari, a partire da destra>: ad esempio 0 e 100 sono in A, 0 e 1000 sono in B (0 è l'unico elemento comune ad entrambi gli insiemi). Ogni intero non negativo è esprimibile in uno e un solo modo come somma di un elemento di A e di uno di B. Ordiniamo gli elementi di B in ordine crescente, dunque sia $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$: posto, per ogni $n \geq 0$, $A_n = A + b_n$, si ottiene allora la successione di sottoinsiemi richiesta.