Kangourou della Matematica 2022
Coppa Kangourou a squadre
Finale 1
Cervia, 5 maggio 2022

Quesiti

1. La differenza

Scegliete quattro cifre non tutte uguali fra loro, formate con esse il numero più grande e il più piccolo (entrambi interi positivi) e calcolate la differenza fra i due (ad esempio, se sceglieste le cifre 0, 7, 2 e 1, dovreste calcolare 7.210 – 127 = 7.083). Ripetete l'operazione con le quattro cifre del numero che avete ottenuto (se fosse un numero con meno di quattro cifre, premettete gli zeri necessari) e proseguite in questo modo. Da un certo momento in poi otterrete sempre uno stesso numero. Quale?

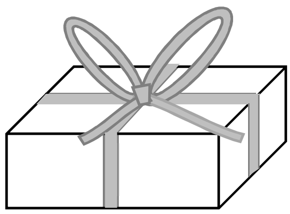
2. Il quadrato a strisce

Un quadrato è ripartito in un numero dispari di strisce verticali tutte della stessa larghezza e colorate, a strisce alterne, di grigio e nero. Il numero di strisce grigie è di uno maggiore di quello delle strisce nere (vedi esempio con 3 strisce in figura). Si sa che la frazione di perimetro del quadrato che delimita la totalità delle strisce nere è i $\frac{6}{25}$ dell'intero perimetro. In quante strisce è ripartito il quadrato?

3. Il triplo

C'è un solo numero intero positivo di cinque cifre che gode di questa proprietà: mettendo la cifra 1 dopo le sue cinque cifre, si ottiene un numero che è il triplo di quello che si ottiene mettendo la cifra 1 prima delle sue cinque cifre. Trovate questo numero di cinque cifre e togliete la cifra delle decine di migliaia. Che numero ottenete?

4. Il regalo



In figura vedete un pacco regalo legato con un nastro. La scatola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo: lunghezza e larghezza della base differiscono di 5,5 cm, l'altezza è più corta di 5 cm rispetto alla minore delle due dimensioni della base. La parte di nastro usata per il nodo e il fiocco è lunga complessivamente 47 cm e la lunghezza totale del nastro è 162 cm. Qual è l'altezza della scatola <u>in millimetri</u>?

5. Diviso 7

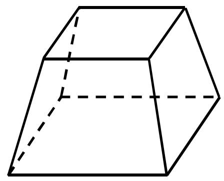
Anna divide un numero intero positivo n di quattro cifre per 7 e ottiene resto 1. Divide allora il quoziente per 7 e ottiene ancora resto 1. Divide questo nuovo quoziente per 7 e ancora il resto è 1. Ora divide questo ultimo quoziente per 7 e ottiene resto 0. Qual è il più grande intero n dal quale Anna potrebbe essere partita?

6. Il denominatore

Se al numeratore e al denominatore della frazione 1/3 aggiungiamo il denominatore, otteniamo 4/6 = 2/3 che è il doppio della frazione da cui eravamo partiti. Se vogliamo che, eseguendo un'operazione analoga, la frazione $1/n$ venga moltiplicata per 2022, quanto deve valere n?

7. Gli spigoli

In figura vedete un tronco di piramide che ha 6 facce e 12 spigoli. Immaginate un tronco di piramide con 2022 facce: quanti spigoli deve avere?

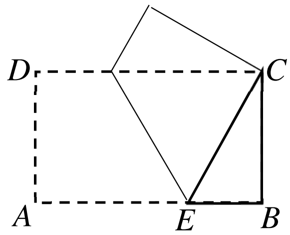


8. Numeri allineati

In corrispondenza di ciascuno dei vertici e nel centro di un poligono regolare di 2022 lati è stato scritto un numero intero positivo. I 2023 numeri scritti sono tutti diversi tra loro e, al variare delle coppie di vertici opposti (cioè allineati con il centro), la somma dei tre numeri allineati (nei due vertici e nel centro) è sempre la stessa ed è la minore possibile con questi presupposti. Quanto vale questa somma?

9. L'area

Come suggerito dalla figura, una striscia di carta rettangolare $ABCD$ è piegata in modo che il punto A si sovrapponga al punto C. Chiamiamo E il punto del lato AB da cui parte la piega. Se l'angolo $\widehat{ECB}$ misura 30° e l'area del triangolo ECB è 15 cm^2, quanti centimetri quadrati misura l'area del rettangolo $ABCD$?

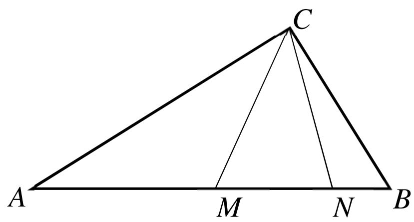


10. Tre amici

Ada va in bicicletta, Bruno corre, Carla cammina. La velocità di Ada è il doppio di quella di Bruno che, a sua volta, è il doppio di quella di Carla. Se partono insieme per fare lo stesso percorso e Carla arriva un'ora dopo Ada, quanti minuti occorrono a Bruno per coprire l'intero percorso?

11. L'angolo

Nel triangolo ABC in figura il lato AB è più lungo di ciascuno degli altri due. M e N sono due punti sul lato AB tali che AN sia lungo quanto AC e BM sia lungo quanto BC. L'angolo $\widehat{MCN}$ misura 40 gradi. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{ACB}$?

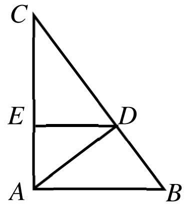


12. Strettamente crescente

Quanti sono i numeri interi compresi tra 10 e 9999 le cui cifre sono disposte in ordine strettamente crescente? (I numeri di 2 cifre NON devono essere pensati come numeri di 4 cifre di cui le prime due cifre siano 0; ad es. 23 è accettabile)

13. Triangoli

In figura vedete un triangolo rettangolo ABC ripartito in tre triangoli rettangoli EDC, EDA e ABD. Se AB misura 75 e AC misura 100, quanto misura ED?

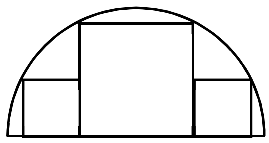


14. Gettoni

Marta deve distribuire 16 gettoni tutti uguali fra loro in 6 sacchetti tutti diversi fra loro in modo che in ogni sacchetto finiscano almeno due gettoni. In quanti modi diversi può farlo? (*Due modi sono diversi se è diverso il contenuto di almeno uno stesso sacchetto.)*

15. I quadrati laterali

La figura mostra un semicerchio che ospita tre quadrati, ognuno dei quali ha un lato sul diametro e almeno un vertice sulla semicirconferenza. Il punto medio del lato di base di quello centrale è il punto medio del diametro; gli altri due quadrati sono accostati in posizione simmetrica a quello centrale. Se il lato del quadrato centrale misura 2.100, quanto misura il lato dei quadrati laterali?



Kangourou della Matematica 2022
Coppa Kangourou a squadre
Finale 1
Cervia, 5 maggio 2022

Quesiti e soluzioni

1. La differenza

Scegliete quattro cifre non tutte uguali fra loro, formate con esse il numero più grande e il più piccolo (entrambi interi positivi) e calcolate la differenza fra i due (ad esempio, se sceglieste le cifre 0, 7, 2 e 1, dovreste calcolare 7.210 – 127 = 7.083). Ripetete l'operazione con le quattro cifre del numero che avete ottenuto (se fosse un numero con meno di quattro cifre, premettete gli zeri necessari) e proseguite in questo modo. Da un certo momento in poi otterrete sempre uno stesso numero. Quale?

Risposta: 6174.
Sol. Provare per credere: è chiaro che, se si ottiene lo stesso numero in due mosse consecutive, quello è la risposta corretta. Il numero di mosse, mai elevato, dipende ovviamente dalle quattro cifre scelte in partenza, dunque dalla fortuna; in ogni caso è stato dimostrato che, qualunque sia la scelta, con al più sette mosse si arriva a 6174.

2. Il quadrato a strisce

Un quadrato è ripartito in un numero dispari di strisce verticali tutte della stessa larghezza e colorate, a strisce alterne, di grigio e nero. Il numero di strisce grigie è di uno maggiore di quello delle strisce nere (vedi esempio con 3 strisce in figura). Si sa che la frazione di perimetro del quadrato che delimita la totalità delle strisce nere è i $\frac{6}{25}$ dell'intero perimetro. In quante strisce è ripartito il quadrato?

Risposta: 0025.

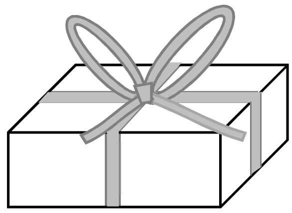
Sol. Diciamo 1 la lunghezza del lato del quadrato; se le strisce sono $2n+1$ risulta $\frac{\frac{n}{2n+1}}{2} = \frac{6}{25}$ da cui $n = 12$.

3. Il triplo

C'è un solo numero intero positivo di cinque cifre che gode di questa proprietà: mettendo la cifra 1 dopo le sue cinque cifre, si ottiene un numero che è il triplo di quello che si ottiene mettendo la cifra 1 prima delle sue cinque cifre. Trovate questo numero di cinque cifre e togliete la cifra delle decine di migliaia. Che numero ottenete?

Risposta: 2857.
Sol. Sia X il numero richiesto. Deve essere $10X + 1 = 3(100.000 + X)$. Iniziando ad eseguire la moltiplicazione per 3 partendo dalla cifra delle unità di X, proseguendo sulle successive e tendo conto dei riporti, si ottiene $X = 42857$.

4. Il regalo



In figura vedete un pacco regalo legato con un nastro. La scatola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo: lunghezza e larghezza della base differiscono di 5,5 cm, l'altezza è più corta di 5 cm rispetto alla minore delle due dimensioni della base. La parte di nastro usata per il nodo e il fiocco è lunga complessivamente 47 cm e la lunghezza totale del nastro è 162 cm. Qual è l'altezza della scatola <u>in millimetri</u>?

Risposta: 0105.
Sol. Detta x l'altezza in centimetri, la somma di lunghezza e larghezza è $2x + 15{,}5$ cm. Deve essere $(2x + 15{,}5) \times 2 + 4x = 115$.

5. Diviso 7

Anna divide un numero intero positivo n di quattro cifre per 7 e ottiene resto 1. Divide allora il quoziente per 7 e ottiene ancora resto 1. Divide questo nuovo quoziente per 7 e ancora il resto è 1. Ora divide questo ultimo quoziente per 7 e ottiene resto 0. Qual è il più grande intero n dal quale Anna potrebbe essere partita?

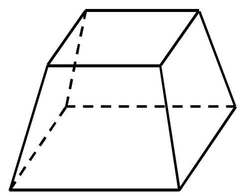
Risposta: 9661.
Sol. Il multiplo $7\times k$ di 7 ottenuto dopo la terza divisione per 7 deve essere tale che $7^4\times k = 2401\times k$ sia minore di 10.000: allora deve essere $k \leq 4$. Ponendo $k = 4$ e procedendo a ritroso si ottiene che 4 è accettabile, dunque è l'ultimo quoziente. ($n = 7\{7[7(7\times4)+1]+1\}+1=2401\times4+57$).

6. Il denominatore

Se al numeratore e al denominatore della frazione 1/3 aggiungiamo il denominatore, otteniamo 4/6 = 2/3 che è il doppio della frazione da cui eravamo partiti. Se vogliamo che, eseguendo un'operazione analoga, la frazione $1/n$ venga moltiplicata per 2022, quanto deve valere n?

Risposta: 4043.
Sol. Vogliamo che sia $(1 + n) / 2n = 2022 / n$: ne segue che deve essere $n = 4043$.

7. Gli spigoli



In figura vedete un tronco di piramide che ha 6 facce e 12 spigoli. Immaginate un tronco di piramide con 2022 facce: quanti spigoli deve avere?

Risposta: 6060.
Sol. Tolta la base inferiore e quella superiore, rimangono 2020 facce laterali quadrangolari: allora le due facce di base e superiore hanno ciascuna 2020 spigoli e rimangono altri 2020 spigoli "laterali".

8. Numeri allineati

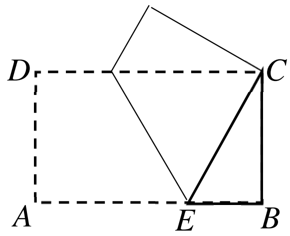
In corrispondenza di ciascuno dei vertici e nel centro di un poligono regolare di 2022 lati è stato scritto un numero intero positivo. I 2023 numeri scritti sono tutti diversi tra loro e, al variare delle coppie di vertici opposti (cioè allineati con il centro), la somma dei tre numeri allineati (nei due vertici e nel centro) è sempre la stessa ed è la minore possibile con questi presupposti. Quanto vale questa somma?

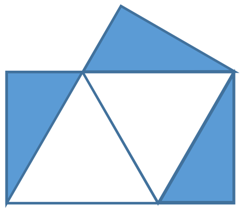
Risposta: 2026.

Sol. Per minimizzare la somma, i numeri candidati da inserire sono quelli da 1 a 2023; perché la somma di ogni terna diametrale sia la minore possibile conviene poi che al centro ci sia 1; quindi restano da accoppiare i 2022 numeri da 2 a 2023 in modo che le somme siano sempre uguali il che si ottiene associando via via il più piccolo numero e il numero più grande rimasti dopo aver rimosso la coppia precedente: 2 + 2023 = 3 + 2022 = … = 1012 + 1013. Quindi la somma di ogni terna è 2026.

9. L'area

Come suggerito dalla figura, una striscia di carta rettangolare *ABCD* è piegata in modo che il punto *A* si sovrapponga al punto *C*. Chiamiamo E il punto del lato *AB* da cui parte la piega. Se l'angolo $\widehat{ECB}$ misura 30° e l'area del triangolo *ECB* è 15 cm^2, quanti centimetri quadrati misura l'area del rettangolo *ABCD*?





Risp: 0090.

Sol. Detto *F* il punto di *CD* in cui arriva la piega, *EF* è bisettrice di $\widehat{AEC}$ e quindi il triangolo *FEC* è equilatero e poiché *DF* è congruente a *EB* si vede che *ABCD* si può ripartire in 6 triangoli congruenti a *EBC*.

10. Tre amici

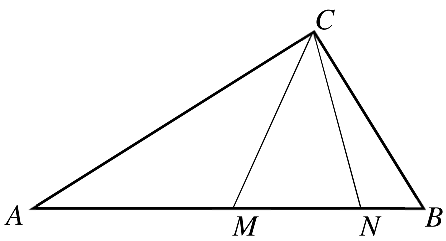
Ada va in bicicletta, Bruno corre, Carla cammina. La velocità di Ada è il doppio di quella di Bruno che, a sua volta, è il doppio di quella di Carla. Se partono insieme per fare lo stesso percorso e Carla arriva un'ora dopo Ada, quanti minuti occorrono a Bruno per coprire l'intero percorso?

Risposta: 0040.

Sol. Carla impiega il quadruplo del tempo impiegato da Ada. La differenza dei due tempi all'arrivo è 60 minuti che corrispondono dunque al triplo del tempo impiegato da Ada, che è quindi 20 minuti.

11. L'angolo

Nel triangolo *ABC* in figura il lato *AB* è più lungo di ciascuno degli altri due. *M* e *N* sono due punti sul lato *AB* tali che *AN* sia lungo quanto *AC* e *BM* sia lungo quanto *BC*. L'angolo $\widehat{MCN}$ misura 40 gradi. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{ACB}$?



Risposta: 0100.

Sol. I triangoli *CAN* e *BCM* sono isosceli, quindi $\widehat{ACN}=\widehat{ANC}$, $\widehat{BCM}=\widehat{CMB}$ e

$$\widehat{ACB}=(\widehat{ACN}+\widehat{BCM}) - 40 = (180 - 40) - 40 = 100.$$

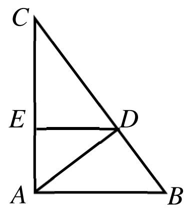
12. Strettamente crescente

Quanti sono i numeri interi compresi tra 10 e 9999 le cui cifre sono disposte in ordine strettamente crescente? (I numeri di 2 cifre NON devono essere pensati come numeri di 4 cifre di cui le prime due cifre siano 0; ad es. 23 è accettabile)

Risposta: 0246.

Sol. I numeri di 3 o 4 cifre sono tanti quante le possibilità di scegliere, tra 10 cifre, 4 cifre tutte diverse, dunque $10 \times 9 \times 8 \times 7 / 24 = 210$. Quelli di 2 cifre sono tanti quanta è la somma dei primi interi da 1 a 8, cioè 36.

13. Triangoli



In figura vedete un triangolo rettangolo *ABC* ripartito in tre triangoli rettangoli *EDC*, *EDA* e *ABD*. Se *AB* misura 75 e *AC* misura 100, quanto misura *ED*?

Risposta: 0048.

Sol. Tutti i triangoli rettangoli presenti in figura sono simili e dato che $\overline{AB} = 25 \times 3$ e $\overline{AC} = 25 \times 4$ hanno tutti i lati in proporzione 3 : 4 : 5. In particolare *AD*, in quanto cateto corto di *ADC* di cui *AC* è ipotenusa, è lungo $20 \times 3 = 60$ e quindi *ED*, in quanto cateto lungo di *ADE*, di cui *AD* è ipotenusa, è lungo $12 \times 4 = 48$.

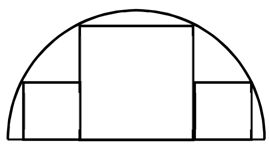
14. Gettoni

Marta deve distribuire 16 gettoni tutti uguali fra loro in 6 sacchetti tutti diversi fra loro in modo che in ogni sacchetto finiscano almeno due gettoni. In quanti modi diversi può farlo? (*Due modi sono diversi se è diverso il contenuto di almeno uno stesso sacchetto.)*

Risposta: 0126.

Sol. Si tratta di collocare 16 – 12 = 4 gettoni: questi possono essere collocati tutti in uno stesso sacchetto in 6 modi diversi, 2 in 2 sacchetti diversi in 15 modi diversi (15 sono le possibili coppie di 6 sacchetti), 3 in un sacchetto e 1 in un altro in 30 modi diversi, 2 in un sacchetto e 1 in ciascuno di altri due sacchetti in 60 modi diversi, 1 in ciascuno di quattro sacchetti in 15 modi diversi.

15. I quadrati laterali



La figura mostra un semicerchio che ospita tre quadrati, ognuno dei quali ha un lato sul diametro e almeno un vertice sulla semicirconferenza. Il punto medio del lato di base di quello centrale è il punto medio del diametro; gli altri due quadrati sono accostati in posizione simmetrica a quello centrale. Se il lato del quadrato centrale misura 2.100, quanto misura il lato dei quadrati laterali?

Risposta: 1050.

Sol. È chiaro che una soluzione è 1.050 perché questa misura rende congruenti i due triangoli rettangoli che hanno un vertice in comune nel centro del semicerchio e gli altri due nei vertici dei lati verticali del quadrato grande e di quello piccolo.
Questa è l'unica soluzione perché applicando il teorema di Pitagora si vede che (posto per comodità di scrittura $2.100 = 2b$) il quadrato della misura del diametro del semicerchio è $5b^2$ e la misura x cercata è tale che $(b + x)^2 + x^2 = 5b^2$, da cui per differenza di quadrati $x(2b+x) = (2b-x)(2b+x)$ cioè, visto che $2b+x$ non può annullarsi, $x=b$.