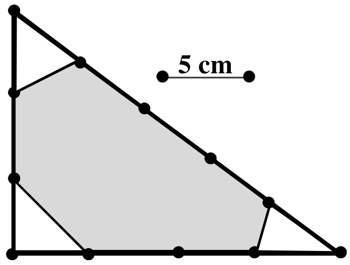
Kangourou della Matematica 2022
Coppa Junior a squadre
Finale 2
Cervia, 5 maggio 2022

Quesiti

1. Con i dadi
Alice e Bice hanno ciascuna un dado tradizionale e fanno il seguente gioco. Ognuna lancia il proprio dado. Se ottengono lo stesso numero, vince Alice; se ottengono numeri diversi, Alice lancia il suo dado di nuovo: se ora i due numeri coincidono, vince Bice, se invece sono ancora diversi, l'incontro si conclude in pareggio. Esprimete la probabilità che l'incontro si concluda in pareggio sotto forma di una frazione ridotta ai minimi termini. Quanto vale la somma del numeratore e del denominatore di questa frazione?

2. Fattori pari
Quanti dei divisori (interi positivi) del numero 20^{22} sono numeri pari?

3. L'esagono
Sui lati del triangolo in figura sono evidenziati alcuni punti (vertici inclusi). Su ogni singolo lato due punti contigui distano 5 cm. Quanti centimetri quadrati misura l'area dell'esagono ombreggiato?



4. Caramelle
Sara distribuisce 150 caramelle in 10 sacchetti. Ogni sacchetto (a partire dal secondo) contiene più caramelle del precedente. Alla fine Sara si accorge che il numero di caramelle che ha messo nel decimo sacchetto non è più del doppio del numero di caramelle che ha messo nel primo. Quante caramelle ha messo nel sesto sacchetto? *Se la risposta non fosse univoca scrivete 0000.*

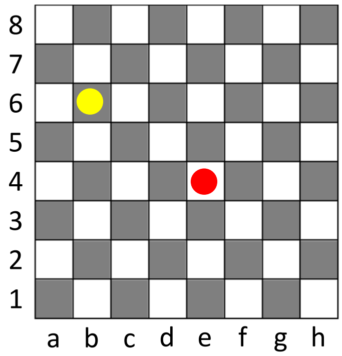
5. 2023 addendi
Considerate la seguente somma

$$8 + 98 + 998 + 9.998 + \ldots + 9.999.\cdots.998$$

dove i 2023 addendi sono ottenuti premettendo alla cifra 8 rispettivamente 0, 1, 2, 3, …, 2022 cifre 9. Quante cifre 1 compaiono nel risultato?

6. La somma delle cifre
Assegnato un numero intero positivo n, denotiamo con $s(n)$ la somma delle sue cifre. Quante cifre ha il più piccolo intero positivo k tale che $s(s(s(k))) = 10$?

7. Sette cifre
Per un numero intero positivo X opportuno, il prodotto $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times X$ è un numero di 7 cifre, le prime due (da sinistra) delle quali sono, nell'ordine, 3 e 0. Quanto vale X?



8. Le mosse del Re
Nel gioco degli scacchi il Re può muovere sulla scacchiera solo di una casella alla volta, in orizzontale, in verticale o in una delle due direzioni diagonali. Il Re vuole andare da **b6** a **e4** senza mai tornare indietro (quindi, con riferimento alla figura, muovendo in orizzontale da sinistra a destra, in verticale dall'alto in basso, in diagonale da sinistra a destra dall'alto in basso). In quanti modi diversi può farlo?

9. Le ambasciate
Su un lontano pianeta ci sono esattamente 30 nazioni, piuttosto litigiose tra loro: infatti non esistono tre nazioni che intrattengano reciproche relazioni diplomatiche (ciascuna con ciascuna delle altre due). Se A è in relazione con B, anche B lo è con A e in A c'è un'ambasciata di B e in B c'è un'ambasciata di A. Quante ambasciate potrebbero esserci al massimo su quel pianeta?

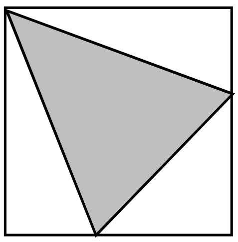
10. La potenza
Quali sono le ultime tre cifre (centinaia, decine, unità) del numero 7^{9999} ?

11. I parallelepipedi
Sono assegnati 4 punti non complanari nello spazio in modo che sia massimo il numero di parallelepipedi, tutti diversi tra loro, tra i cui vertici ci siano questi 4 punti. Qual è questo numero?

12. Divisioni per 7
Immaginate che, dividendo per 7 un numero intero positivo, otteniate resto 1. Se il quoziente di questa prima divisione non è divisibile per 7, immaginate che il resto della divisione per 7 di questo quoziente sia ancora 1 e così via fino a quando, dopo un numero finito di passi, il quoziente sia divisibile per 7. Qual è il più piccolo intero positivo di quattro cifre dal quale potreste essere partiti?

13. Sette punti
Su una circonferenza sono marcati e nominati 7 punti distinti. In quanti modi diversi possono essere tracciati dei segmenti, ognuno dei quali abbia due di questi punti per estremi, in modo che ognuno dei 7 punti sia estremo di esattamente due segmenti?

14. Il quadrato
In figura vedete un quadrato ripartito in quattro triangoli. Quello grigio ha area $432\sqrt{5}-720$ cm^2 e i tre triangoli bianchi sono tra loro equivalenti. Quanti centimetri è lungo il lato del quadrato?



15. Scritto a destra
Quanti sono i numeri interi positivi n minori di 10.000 che godono di questa proprietà: qualunque sia l'intero positivo M, se si scrivono le cifre di n alla destra di quelle di M, il numero ottenuto accostando i due numeri è divisibile per n. (*Sia per M sia per n la notazione usata è quella decimale.*)

Kangourou della Matematica 2022
Coppa Junior a squadre
Finale 2
Cervia, 5 maggio 2022

Quesiti e soluzioni

1. Con i dadi

Alice e Bice hanno ciascuna un dado tradizionale e fanno il seguente gioco. Ognuna lancia il proprio dado. Se ottengono lo stesso numero, vince Alice; se ottengono numeri diversi, Alice lancia il suo dado di nuovo: se ora i due numeri coincidono, vince Bice, se invece sono ancora diversi, l'incontro si conclude in pareggio. Esprimete la probabilità che l'incontro si concluda in pareggio sotto forma di una frazione ridotta ai minimi termini. Quanto vale la somma del numeratore e del denominatore di questa frazione?

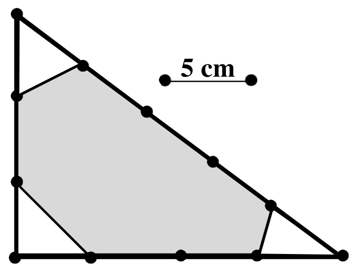
Risposta: 0061.
Sol. La probabilità che vinca Alice è 1/6, quella che vinca Bice è 5/6 × 1/6: il complemento a 1 è 25/36.

2. Fattori pari

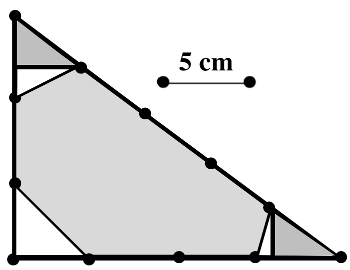
Quanti dei divisori (interi positivi) del numero 20^{22} sono numeri pari?

Risposta: 1012.
Sol. Si ha $20^{22} = 5^{22} \times 2^{44}$. Sono fattori pari, e solo questi, tutte le prime 44 potenze di 2 con esponente positivo moltiplicate per una qualunque delle prime 23 potenze di 5 con esponente non negativo. In totale 44 × 23 fattori.

3. L'esagono



Sui lati del triangolo in figura sono evidenziati alcuni punti (vertici inclusi). Su ogni singolo lato due punti contigui distano 5 cm. Quanti centimetri quadrati misura l'area dell'esagono ombreggiato?



Risposta: 0120.
Sol. Il triangolo originale ha area 150. I due triangoli ombreggiati sono simili al triangolo di partenza con rapporto 1:5 sui lati, per cui le loro altezze parallele ai cateti corrispondenti del triangolo originale misurano 3 e 4 cm. Allora le aree dei tre triangoli da levare per ottenere l'esagono misurano 15/2, 10 e 25/2 cm^2.

4. Caramelle

Sara distribuisce 150 caramelle in 10 sacchetti. Ogni sacchetto (a partire dal secondo) contiene più caramelle del precedente. Alla fine Sara si accorge che il numero di caramelle che ha messo nel decimo sacchetto non è più del doppio del numero di caramelle che ha messo nel primo. Quante caramelle ha messo nel sesto sacchetto? *Se la risposta non fosse univoca scrivete 0000.*

Risposta: 0016.

Sol. Se n è il numero di caramelle nel primo sacchetto, si deve avere $n + n+1 + n+2 + \ldots + n+9 = 10n + 45 \leq 150$, da cui $n \leq 10$. D'altra parte, nel decimo sacchetto ci possono essere al massimo $2n$ caramelle, il che implica che nel k-esimo ce ne siano al massimo $2n - (10 - k)$ e dunque, sommando su tutti i sacchetti, che sia $20n - 45 \geq 150$, da cui $n > 9$. Allora l'unica distribuzione possibile è la seguente 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20.

5. 2023 addendi

Considerate la seguente somma

$$8 + 98 + 998 + 9.998 + \ldots + 9.999.\cdots.998$$

dove i 2023 addendi sono ottenuti premettendo alla cifra 8 rispettivamente 0, 1, 2, 3, …, 2022 cifre 9. Quante cifre 1 compaiono nel risultato?

Risposta: 2019.

Sol. La somma può essere riscritta come

$$(10^1 - 2) + (10^2 - 2) + \ldots + (10^{2023} - 2) = 111\ldots10 - 4046 = 111\ldots107064$$

dove le cifre 1 di 111…10 sono 2023.

6. La somma delle cifre

Assegnato un numero intero positivo n, denotiamo con $s(n)$ la somma delle sue cifre. Quante cifre ha il più piccolo intero positivo k tale che $s(s(s(k))) = 10$?

Risposta: 0023.

Sol. Denotiamo con $X(n)$ il più piccolo intero positivo k tale che $s(k) = n$. Se $n = 9a + B$ con a e B interi non negativi e $B < 9$, si ha $X(n) = B99\ldots99$ dove la cifra 9 compare a volte. Ne segue che $m > n$ implica $X(m) > X(n)$, dunque si può procedere a ritroso. Si ha $X(10) = 19$, $X(19) = 199$ e infine $X(199 = 22 \times 9 + 1) = 199\ldots99$ dove la cifra 9 compare 22 volte.

7. Sette cifre

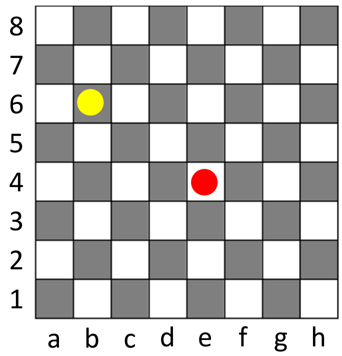
Per un numero intero positivo X opportuno, il prodotto $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times X$ è un numero di 7 cifre, le prime due (da sinistra) delle quali sono, nell'ordine, 3 e 0. Quanto vale X?

Risposta: 0037. **Sol.** Dividendo per 10 si ottiene che deve essere

$$3 \times 4 \times 7 \times 9 \times 11 \times X = 300.000 + Y$$

dove Y è un numero di al più 4 cifre. Si ha $3 \times 4 \times 7 \times 9 \times 11 = 8.316$ e 300.000 : 8.316 dà come quoziente 36,07…. Ciò suggerisce di porre $X = 37$: si ha in effetti $307.692 = 8.316 \times 37$. D'altra parte si ha $8.316 \times 36 = 299.376$ mentre $8.316 \times 38 = 316.008$.

8. Le mosse del Re



Nel gioco degli scacchi il Re può muovere sulla scacchiera solo di una casella alla volta, in orizzontale, in verticale o in una delle due direzioni diagonali. Il Re vuole andare da **b6** a **e4** senza mai tornare indietro (quindi, con riferimento alla figura, muovendo in orizzontale da sinistra a destra, in verticale dall'alto in basso, in diagonale da sinistra a destra dall'alto in basso). In quanti modi diversi può farlo?

Risp: 0025.

1	1	1	1
1	3	5	7
1	5	13	25

Sol. In ogni cella del disegno è indicato il numero di scelte con cui è possibile raggiungere la casella (via via si sommano i numeri nella L che racchiude la cella)

9. Le ambasciate

Su un lontano pianeta ci sono esattamente 30 nazioni, piuttosto litigiose tra loro: infatti non esistono tre nazioni che intrattengano reciproche relazioni diplomatiche (ciascuna con ciascuna delle altre due). Se A è in relazione con B, anche B lo è con A e in A c'è un'ambasciata di B e in B c'è un'ambasciata di A. Quante ambasciate potrebbero esserci al massimo su quel pianeta?

Risposta: 0450.

Sol. Al variare delle nazioni, sia N una di quelle che intrattengono il maggior numero di relazioni diplomatiche, sia n questo numero e sia X l'insieme di queste n nazioni (che non include N). Nella nostra ipotesi, ogni nazione di X può essere eventualmente in relazione solo con nazioni non in X: allora il numero complessivo k di relazioni tra nazioni sul pianeta deve soddisfare la disuguaglianza $k \leq n \times (30 - n) \leq 225$ (quota del vertice della parabola di equazione $k = n \times (30 - n)$, oppure $n \times (30 - n) = 900 / 4 - (30/2 - n)^2 \leq 900 / 4$). 225 relazioni sono effettivamente possibili se $n = 15$, cioè una nazione intrattiene relazioni con altre 15, ciascuna delle quali intrattiene relazioni con ciascuna delle altre 15.

10. La potenza

Quali sono le ultime tre cifre (centinaia, decine, unità) del numero 7^{9999} ?

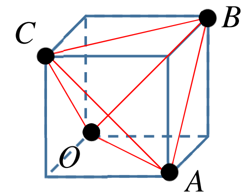
Risposta: 0143. Sol. Considerando le potenze successive di 7, si calcola subito che le cifre delle decine e unità si ripetono con periodo 4 (07, 49, 43, 01): poiché il resto della divisione 9999 : 4 è 3, le ultime due cifre di 7^{9999} sono 43. Sempre con calcoli abbastanza veloci si ottiene che, quando le ultime due cifre sono 43, le cifre delle centinaia si susseguono ciclicamente nell'ordine 3, 5, 7, 9, 1. Poiché la cifra 3 delle centinaia compare in $7^3 = 343$ e $(9999 - 2) : 20$ dà resto 17, la cifra delle centinaia di 7^{9999} è 1.

11. I parallelepipedi

Sono assegnati 4 punti non complanari nello spazio in modo che sia massimo il numero di parallelepipedi, tutti diversi tra loro, tra i cui vertici ci siano questi 4 punti. Qual è questo numero?

Risposta: 0029. Sol. Le quaterne di vertici di un parallelepipedo a facce quadrangolari sono $\binom{8}{4} = 70$; di queste 12 sono complanari (una quaterna per ognuna delle facce, una quaterna per ognuna delle coppie di spigoli opposti). Associata ad ognuna delle 58 quaterne rimanenti la quaterna complementare, si ottengono 29 coppie di quaterne. Ora è facile controllare che ogni quaterna di punti prefissata nello spazio può svolgere, per ciascuna di queste 29 coppie, il ruolo di una delle sue due quaterne; a coppie diverse, almeno se la quaterna è scelta opportunamente, corrispondono parallelepipedi diversi.

Altra possibile soluzione: ha il vantaggio di mostrare inequivocabilmente che in realtà il numero di parallelepipedi costruibili è invariante rispetto alle quaterne di partenza.



Chiamiamo A, B, C, O i 4 punti. Osserviamo innanzi tutto che c'è uno e un solo parallelepipedo che ha tale quaterna come tetraedro inscritto e quindi è tale che le coppie di punti non individuano spigoli del parallelepipedo.

Determiniamo ora i restanti parallelepipedi elencando le possibili terne spigoli che danno le tre direzioni nello spazio. Possiamo individuarne due tipologie:

- terne di coppie di punti estratte dall'insieme di punti A, B, C, O;
- terne di coppie di punti di cui due coppie con un punto in comune e la terza formata congiungendo il punto residuo con il quarto vertice di un parallelogramma determinato dagli altri 3 punti (ad es. se si fissano le coppie OA e OB e O' è il quarto vertice del parallelogramma che ha questi due come lati, la terza coppia sarà $O'C$).

Nella prima tipologia ci sono:

4 terne di coppie convergenti in un punto:

$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$; $\{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$; $\{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\}$; $\{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\}$,

12 terne che hanno i 3 spigoli consecutivi e che possono quindi essere identificati con la sequenza degli estremi (sono le permutazioni di 4 oggetti, identificando le coppie di sequenze lette in ordine inverso):

ABOC, *ABCO*, *ACBO*, *ACOB*, *AOBC*, *AOCB*;
BOAC, *BAOC*, *BACO*, *BCAO*; *CABO*, *CBAO*;

Nella seconda tipologia ci sono 12 terne create con il quarto vertice di parallelogrammi con vertici in

O, A, B: $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O'C}\}$; $\{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C}\}$; $\{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B'C}\}$;

O, A, C: $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O''B},\overrightarrow{OC}\}$; $\{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{A''B},\overrightarrow{AC}\}$; $\{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C''B}\}$

O, B, C: $\{\overrightarrow{O'''A},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$; $\{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{B'''A},\overrightarrow{BC}\}$; $\{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{C'''A},\overrightarrow{CB}\}$;

A, B, C: $\{\overrightarrow{A''''O},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$; $\{\overrightarrow{B''''O},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\}$; $\{\overrightarrow{C''''O},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\}$

12. Divisioni per 7

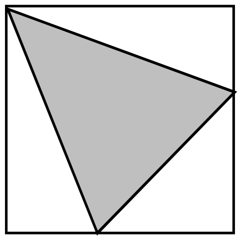
Immaginate che, dividendo per 7 un numero intero positivo, otteniate resto 1. Se il quoziente di questa prima divisione non è divisibile per 7, immaginate che il resto della divisione per 7 di questo quoziente sia ancora 1 e così via fino a quando, dopo un numero finito di passi, il quoziente sia divisibile per 7. Qual è il più piccolo intero positivo di quattro cifre dal quale potreste essere partiti?

Risposta: 1030.
Sol. Poiché 999 : 7 dà resto 5, il più piccolo multiplo di 7 non minore di 1000 è 1001: 1001=7×143. Allora si può partire da un numero della forma $1 + 7(143 + k)$ ove k è tale che $143 + k$ sia divisibile per 7, cioè da 1030.

13. Sette punti
Su una circonferenza sono marcati e nominati 7 punti distinti. In quanti modi diversi possono essere tracciati dei segmenti, ognuno dei quali abbia due di questi punti per estremi, in modo che ognuno dei 7 punti sia estremo di esattamente due segmenti?

Risposta: 0465.
Sol. Esistono solo due tipologie di configurazioni possibili: una corrispondente ad un unico grafo connesso, che collega dunque tutti i vertici, l'altra corrispondente a due grafi connessi disgiunti.
Per contare le configurazioni della prima, numeriamo i punti in ordine casuale da 1 a 7. Questa numerazione evidenzia un tracciamento ammissibile dei segmenti se viene interpretata nel modo seguente: un segmento va da 1 a 2, uno da 2 a 3 e così via fino all'ultimo da 7 a 1. Questa numerazione fornisce lo stesso tracciamento se e solo se viene letta facendola iniziare da uno qualunque dei punti e facendola proseguire ciclicamente nello stesso verso: ciò significa che ognuna delle 7! permutazioni dei primi 7 interi fornisce 7 tracciamenti coincidenti orientati, dunque ognuno contato due volte se non orientato. Per questa prima tipologia il numero di configurazioni è allora $7! / (7 \times 2) = 6! / 2 = 360$.
La seconda tipologia corrisponde a due grafi, uno di tre vertici e l'altro di quattro: per quello di tre vertici esiste una sola configurazione possibile, per quello di quattro ne esistono tre. Le terne non ordinate di vertici sono 35: la seconda tipologia fornisce dunque complessivamente 105 configurazioni.

14. Il quadrato



In figura vedete un quadrato ripartito in quattro triangoli. Quello grigio ha area $432\sqrt{5}-720$ cm^2 e i tre triangoli bianchi sono tra loro equivalenti. Quanti centimetri è lungo il lato del quadrato?

Risposta: 0024.
Sol. Nella figura i due triangoli rettangoli non isosceli sono congruenti: denoto con x la lunghezza del loro cateto corto e con $2y$ quella del cateto del triangolo isoscele. Poiché hanno la stessa area, $x(x+2y)=4y^2$, quindi $x=(\sqrt{5}-1)y$ e il lato del quadrato è lungo $(\sqrt{5}+1)y$. Ne segue che l'area del triangolo grigio è

$$(\sqrt{5}+1)^2 y^2 - 6y^2 = 2\sqrt{5}\, y^2,$$

cioè è $\sqrt{5}$ volte l'area di ciascuno degli altri triangoli. Dunque l'area del quadrato è $\frac{(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}} = \frac{4}{3\sqrt{5}-5}$ volte l'area, $144(3\sqrt{5}-5)$, del triangolo grigio e quindi il lato del quadrato è 24.

15. Scritto a destra
Quanti sono i numeri interi positivi n minori di 10.000 che godono di questa proprietà: qualunque sia l'intero positivo M, se si scrivono le cifre di n alla destra di quelle di M, il numero ottenuto accostando i due numeri è divisibile per n. (*Sia per M sia per n la notazione usata è quella decimale.*)

Risposta: 0017.

Sol. Sia n uno dei numeri ammissibili e sia k (k = 1, 2, 3 ,4) il numero delle sue cifre: il numero ottenuto è della forma $M \times 10^k + n$ ed è dunque chiaro che n deve dividere 10^k perché M e n potrebbero essere primi fra loro. La lista degli n ammissibili è allora:

- 1, 2, 5 con $k = 1$,
- 10, 20, 25, 50 con $k = 2$,
- 100, 125, 200, 250, 500 con $k = 3$,
- 1.000, 1.250, 2.000, 2.500, 5.000 con $k = 4$.