Kangourou della Matematica 2019
Coppa Junior a squadre
Finale
Cervia, 7 maggio 2019

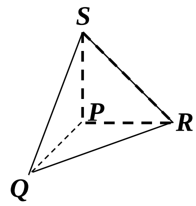
Quesiti

1. Coordinate intere

Quanti punti a coordinate entrambe intere appartengono al cerchio di raggio 10 centrato nell'origine, circonferenza inclusa? (*Si intende che il piano venga dotato di un usuale sistema cartesiano ortogonale monometrico*.)

2. Il tetraedro

La figura mostra un tetraedro il cui vertice S si proietta perpendicolarmente in P sul piano che contiene la faccia PQR. Tale faccia è un triangolo rettangolo; gli spigoli SQ, SR e RQ sono tutti lunghi 8 cm. Qual è l'intero più vicino al numero che rappresenta l'area della superficie totale del tetraedro, espressa in centimetri quadrati?



3. Le cifre del quadrato

Esiste un solo numero intero positivo di quattro cifre tale che le ultime quattro cifre del suo quadrato siano il numero stesso. Qual è?

4. Il tennis

Giulio e Piero giocano alcune partite a tennis. Giulio, che è più bravo, in ogni partita ha 2/3 di probabilità di vincere. Qual è la probabilità che sia Giulio a totalizzare per primo due vittorie? *(Scrivete nell'ordine il numeratore e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)*

5. Gli allineamenti

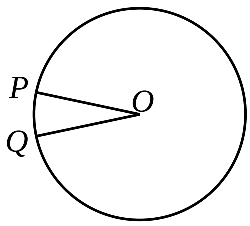
Quanti diversi allineamenti formati da sei delle cifre da 0 a 9 si possono costruire, se in ogni allineamento si consente che le cifre possano essere ripetute, ma non tutte uguali, e compaiano in ordine (non strettamente) crescente o decrescente?

6. La parte intera

Per ogni numero reale x, con il simbolo $[x]$ si denota il più grande intero che non supera x. Quanti interi positivi n sono tali che $[n/20] = [n/17]$?

7. Il circuito

Gino e Lino corrono su un circuito circolare di centro O (vedere la figura): Gino parte dal punto P e si muove in verso anti-orario, Lino parte dal punto Q e si muove in verso orario. L'angolo POQ misura 10 gradi. Partono allo stesso istante e nella prima ora ciascuno percorre un quarto del circuito; allo scadere di ogni ora successiva, la velocità media tenuta risulta due terzi della velocità media tenuta nell'ora precedente. Dette P' la posizione di Gino e Q' quella di Lino dopo tre ore di corsa, quanti gradi misura l'angolo convesso $P'OQ'$?



8. I punti medi

Si considerino 2019 punti distinti in un piano. Per ogni coppia di tali punti si consideri il punto medio del segmento individuato dalla coppia e sia S l'insieme di tali punti medi (eventuali punti medi coincidenti individuano un solo elemento di S). Qual è il minimo numero possibile per gli elementi di S?

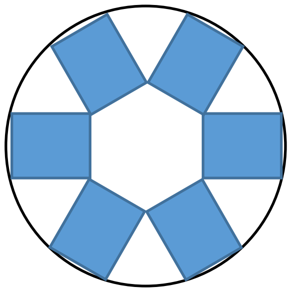
9. Un numero di 4 cifre

La cifra delle unità di un numero di quattro cifre significative è 2. Se la si sposta al primo posto, facendola diventare la cifra delle migliaia e lasciando inalterato l'ordine delle altre, i ¾ del numero che si ottiene è un numero che differisce di 0,5 dal numero iniziale. Qual è il numero iniziale?

10. Somma e prodotto

Quante coppie di numeri non negativi, che si scrivono in notazione decimale con al più tre cifre dopo la virgola, hanno la loro somma uguale al loro prodotto? (*Considerate come due coppie distinte le coppie in cui gli elementi sono scambiati come ad esempio* (1,5; 3) *e* (3; 1,5))

11. I sei rettangoli



In figura vedete una circonferenza di raggio 25 dm all'interno della quale sono disposti sei rettangoli, a due a due congruenti, ciascuno con due vertici sulla circonferenza e gli altri due condivisi con i rettangoli adiacenti. Il lato dei rettangoli avente solo un estremo sulla circonferenza misura 14 dm. Qual è l'intero più vicino alla lunghezza in centimetri dell'altro lato?

12. Le cifre decimali

Quali sono le prime quattro cifre decimali (cioè a destra della virgola) nella rappresentazione decimale del numero $(\sqrt{50} + 7)^4$?

13. ANNULLATO

14. Tre mosse

Partendo da un punto (x, y) del piano (dotato di un usuale sistema cartesiano ortogonale monometrico) <u>con x e y interi positivi</u>, compiere una mossa significa raggiungere il punto $(x - y, y)$ oppure il punto $(x + y, y)$ oppure il punto (y, x). Al variare delle possibili scelte del punto di partenza nel cerchio centrato nell'origine di raggio 4 e dopo quantità opportune di mosse, quanti dei punti contenuti nel cerchio di raggio 1000 centrato nel punto (2019, 2019) e che abbiano ascissa o ordinata, o entrambe, uguali a 2019 possono essere raggiunti? (*I cerchi nominati si intendono comprensivi della circonferenza che li delimita*).

15. Tre feste

Voglio fare tre feste e voglio invitare ad ogni festa tre dei miei sei amici; voglio che nessuna terna di amici sia invitata a più di una festa e che nessuno dei miei amici sia presente a tutte le tre feste. In quanti modi diversi posso programmare gli inviti? (*Due modi possono essere diversi se le terne coinvolte sono diverse, o anche solo invitate a feste diverse*).

Kangourou della Matematica 2019
Coppa Junior a squadre
Finale
Cervia, 7 maggio 2019

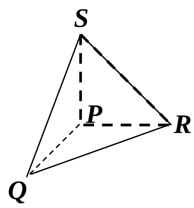
Quesiti e soluzioni

1. Coordinate intere

Quanti punti a coordinate entrambe intere appartengono al cerchio di raggio 10 centrato nell'origine, circonferenza inclusa? (*Si intende che il piano venga dotato di un usuale sistema cartesiano ortogonale monometrico.*)

Risposta: 0317.
Soluzione. Il quadrato $[-7, 7]^2$ è interamente contenuto nel cerchio. Inoltre vi sono 13×4 punti con ascissa o ordinata 8 o – 8, 9×4 punti con ascissa o ordinata 9 o – 9, 1×4 punti con ascissa o ordinata 10 o –10.

2. Il tetraedro



La figura mostra un tetraedro il cui vertice S si proietta perpendicolarmente in P sul piano che contiene la faccia PQR. Tale faccia è un triangolo rettangolo; gli spigoli SQ, SR e RQ sono tutti lunghi 8 cm. Qual è l'intero più vicino al numero che rappresenta l'area della superficie totale del tetraedro, espressa in centimetri quadrati?

Risposta: 0076.
Soluzione. Anche le facce PSR e PSQ sono triangoli rettangoli isosceli; applicando il teorema di Pitagora si vede che essi (come anche PQR) sono isosceli e congruenti. L'area della superficie totale del tetraedro è quindi $16\times(3+\sqrt{3})$ cm^2 (numero compreso tra 75,68 e 75,84).

3. Le cifre del quadrato

Esiste un solo numero intero positivo di quattro cifre tale che le ultime quattro cifre del suo quadrato siano il numero stesso. Qual è?

Risposta: 9376.
Soluzione. Se n è il numero, $n^2 - n$ deve essere divisibile per $10^4 = 16 \times 625$. Allora o n o $n - 1$ deve essere divisibile per 625.
Sia $n = 625 \times k$ con k intero: allora $625 \times k - 1 = 624 \times k + k - 1$ deve essere divisibile per 16, dunque $k - 1$ deve essere divisibile per 16, cioè k deve essere almeno 17, ma 625×17 ha cinque cifre. Allora deve essere $n - 1 = 625 \times k$ con k intero, per cui $n = 624 \times k + k + 1$, 16 deve dividere $k + 1$, dunque k deve essere almeno 15, $n = 625 \times 15 + 1$.

4. Il tennis

Giulio e Piero giocano alcune partite a tennis. Giulio, che è più bravo, in ogni partita ha 2/3 di probabilità di vincere. Qual è la probabilità che sia Giulio a totalizzare per primo due vittorie? *(Scrivete nell'ordine il numeratore e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)*

Risposta: 2027.
Soluzione. Giulio totalizza per primo due vittorie se la sequenza delle vittorie è GG (probabilità 4/9) oppure GPG o PGG (entrambe probabilità 4/27).

5. Gli allineamenti

Quanti diversi allineamenti formati da sei delle cifre da 0 a 9 si possono costruire, se in ogni allineamento si consente che le cifre possano essere ripetute, ma non tutte uguali, e compaiano in ordine (non strettamente) crescente o decrescente?

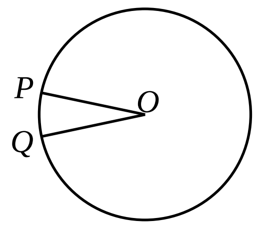
Risposta: 9990.
Soluzione. Quelli in ordine crescente sono tanti quanti le combinazioni con ripetizione di 10 elementi di classe 6, dunque 10 + 6 – 1 su 6 cioè 15 su 6, dunque 5005. Occorre raddoppiare questo numero e sottrarre i 10 allineamenti di cifre tutte uguali fra loro, che sono stati contati due volte.

6. La parte intera

Per ogni numero reale x, con il simbolo $[x]$ si denota il più grande intero che non supera x. Quanti interi positivi n sono tali che $[n/20] = [n/17]$?

Risposta: 0056.
Soluzione. n risolve l'equazione se e solo se si ha $n = 20q + r = 17q + R$ per qualche terna (q, r, R) di interi non negativi con $0 \leq r \leq 19$, $0 \leq R \leq 16$. Da $R = 3q + r$, si ricava che deve essere $R \geq r$. Naturalmente non può essere $R = r = 0$; quindi se $q = 0$ ci sono solo 16 possibilità per R, mentre per valori superiori di q compresi da 1 a 5 ci sono $17 - 3q$ possibilità. Sommando: $16 + 17\times5 - 15\times3 = 56$.

7. Il circuito



Gino e Lino corrono su un circuito circolare di centro O (vedere la figura): Gino parte dal punto P e si muove in verso anti-orario, Lino parte dal punto Q e si muove in verso orario. L'angolo POQ misura 10 gradi. Partono allo stesso istante e nella prima ora ciascuno percorre un quarto del circuito; allo scadere di ogni ora successiva, la velocità media tenuta risulta due terzi della velocità media tenuta nell'ora precedente. Dette P' la posizione di Gino e Q' quella di Lino dopo tre ore di corsa, quanti gradi misura l'angolo convesso $P'OQ'$?

Risposta: 0010.
Soluzione. Le ampiezze in gradi degli angoli coperti nelle prime tre ore sono, nell'ordine, 90, 60 e 40. 190 = 180 + 10, dunque l'angolo $P'OQ'$ è opposto all'angolo POQ.

8. I punti medi

Si considerino 2019 punti distinti in un piano. Per ogni coppia di tali punti si consideri il punto medio del segmento individuato dalla coppia e sia S l'insieme di tali punti medi (eventuali punti medi coincidenti individuano un solo elemento di S). Qual è il minimo numero possibile per gli elementi di S?

Risposta: 4035.
Soluzione. Si considerino due dei 2019 punti, A e B, che realizzano il massimo d delle mutue distanze fra tutti i punti. Al cerchio di raggio $d/2$ centrato in A appartengono tutti i punti medi dei segmenti uno dei cui estremi è A e tali punti medi sono tutti distinti fra loro; lo stesso accade per B. I due cerchi hanno un solo punto in comune. Dunque gli elementi di S devono essere almeno $2 \times 2018 - 1$. Esiste qualche situazione in cui i punti di S sono effettivamente 4035: basta prendere 2019 punti allineati ciascuno a distanza 1 da quelli adiacenti.

9. Un numero di 4 cifre

La cifra delle unità di un numero di quattro cifre significative è 2. Se la si sposta al primo posto, facendola diventare la cifra delle migliaia e lasciando inalterato l'ordine delle altre, i ¾ del numero che si ottiene è un numero che differisce di 0,5 dal numero iniziale. Qual è il numero iniziale?

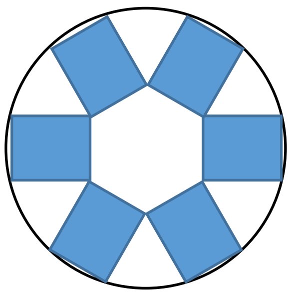
Risposta: 1622.
Soluzione. Sia $ABC2$ il numero iniziale.
Da $4(1000A + 100B + 10C + 2 - 0{,}5) = 3(2000 + 100A + 10B + C)$
segue $37(100A + 10B + C) = 5994$, cioè $ABC = 162$.

10. Somma e prodotto

Quante coppie di numeri non negativi, che si scrivono in notazione decimale con al più tre cifre dopo la virgola, hanno la loro somma uguale al loro prodotto? (*Considerate come due coppie distinte le coppie in cui gli elementi sono scambiati come ad esempio* (1,5; 3) *e* (3; 1,5))

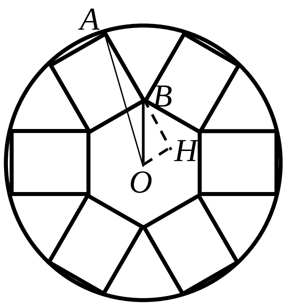
Risposta: 0050.
Soluzione. Si deve avere $xy=x+y$, cioè o $x=y=0$ oppure $(x-1)(y-1)=1$ ove i numeri $x-1$, $y-1$ sono dei razionali con rappresentazione decimale finita, con 3 cifre dopo la virgola, quindi ottenute dividendo per uno dei fattori interi di $1000=2^3\times5^3$; quindi $x-1$ può essere uno qualunque dei numeri $2^h\times5^k$ con h e k compresi tra -3 e 3 e quindi ci sono altre $7\times7=49$ coppie ordinate.

11. I sei rettangoli



In figura vedete una circonferenza di raggio 25 dm all'interno della quale sono disposti sei rettangoli, a due a due congruenti, ciascuno con due vertici sulla circonferenza e gli altri due condivisi con i rettangoli adiacenti. Il lato dei rettangoli avente solo un estremo sulla circonferenza misura 14 dm. Qual è l'intero più vicino alla lunghezza in centimetri dell'altro lato?

Risposta: 0119.
Soluzione. Siano O il centro della circonferenza, A uno dei vertici sulla circonferenza di uno dei sei rettangoli e B l'altro estremo del lato lungo 14 dm; poiché l'angolo ABO misura 150 gradi, detto H il piede dell'altezza del triangolo ABO rispetto alla base AB, l'angolo OBH misura 30 gradi.



Il teorema di Pitagora applicato al triangolo OBH fornisce, detta x la lunghezza in decimetri del lato incognito,
$x^2/4 + (14 + \sqrt{3}x/2)^2 = 25^2$, cioè $x^2 + 14\sqrt{3}x + 14^2 - 25^2 = 0$, cioè
$x = \sqrt{3\times7^2 + 25^2 - 4\times7^2} - 7\sqrt{3} = \sqrt{32\times18} - 7\sqrt{3} = 3\times8 - 7\sqrt{3} = 24 - 7\sqrt{3}$.
Approssimando per difetto $\sqrt{3} = 1{,}732$ e poi per eccesso e moltiplicando per 10 si ha: $118{,}69 = 240 - 121{,}31 < x < 2400 - 121{,}24 = 118{,}76$.

12. Le cifre decimali

Quali sono le prime quattro cifre decimali (cioè a destra della virgola) nella rappresentazione decimale del numero $(\sqrt{50} + 7)^4$?

Risposta: 9999.
Soluzione. Il numero $(\sqrt{50} + 7)^4 + (\sqrt{50} - 7)^4$ è intero: infatti nello sviluppo di $(\sqrt{50} + 7)^4$ i termini sono tutti positivi, mentre nello sviluppo di $(\sqrt{50} - 7)^4$ i termini che vedono $\sqrt{50}$ elevato ad una potenza dispari vedono anche - 7 elevato ad una potenza dispari, dunque sono negativi. Facilmente si verifica che $\sqrt{50} - 7 < 1/10$.

13. ANNULLATO

14. Tre mosse

Partendo da un punto (x, y) del piano (dotato di un usuale sistema cartesiano ortogonale monometrico) con x e y interi positivi, compiere una mossa significa raggiungere il punto ($x - y$, y) oppure il punto ($x + y$, y) oppure il punto (y, x). Al variare delle possibili scelte del punto di partenza nel cerchio centrato nell'origine di raggio 4 e dopo quantità opportune di mosse, quanti dei punti contenuti nel cerchio di raggio 1000 centrato nel punto (2019, 2019) e che abbiano ascissa o ordinata, o entrambe, uguali a 2019 possono essere raggiunti? (*I cerchi nominati si intendono comprensivi della circonferenza che li delimita*).

Risposta: 2664.
Soluzione. Partendo da (x, y) si possono raggiungere tutti e soli i punti (x', y') tali che MCD$\{x, y\}$ = MCD$\{x', y'\}$. Infatti chiaramente il MCD tra ascissa e ordinata dei punti di partenza e di arrivo è un invariante della mossa; d'altra parte, posto M = MCD$\{x, y\}$ = MCD$\{x', y'\}$, da (x, y) una mossa può portare sia in ($x \pm kM$, y) con k intero positivo opportuno sia in (y, x), dunque ogni tale (x', y') è raggiungibile. I divisori di 2019 sono solo 1, 3, 673 e 2019: allora (2019, 2019) non è raggiungibile e, fra i punti indicati e con le possibili partenze indicate (che non includono il punto (3,3)), sono raggiungibili solo quelli del tipo (2019, 2019 ± y') o (2019 ± x', 2019) con y' e x' compresi tra 1 e 1000 inclusi, esclusi i multipli di 3 e 673.

15. Tre feste

Voglio fare tre feste e voglio invitare ad ogni festa tre dei miei sei amici; voglio che nessuna terna di amici sia invitata a più di una festa e che nessuno dei miei amici sia presente a tutte le tre feste. In quanti modi diversi posso programmare gli inviti? (*Due modi possono essere diversi se le terne coinvolte sono diverse, o anche solo invitate a feste diverse*).

Risposta: 2880.
Soluzione. Le terne possibili sono 20 e ogni amico compare in 10 di queste. Per la terna della prima festa sono possibili 20 scelte. Per la seconda festa sono possibili:
- 1 scelta con intersezione vuota con la prima festa, che rende quindi ammissibili 18 scelte per la terza festa;
- 9 scelte con un amico in comune con la prima festa, ognuna delle quali rende ammissibili per la terza festa le 10 terne che non includono quell'amico;
- 9 scelte con una coppia di amici in comune con la prima festa, ognuna delle quali rende ammissibili per la terza festa le 4 terne che non contengono quella coppia di amici.

In definitiva: $20 \times (1 \times 18 + 9 \times 10 + 9 \times 4) = 2880$.