Kangourou della Matematica 2019
Coppa Junior a squadre
Semifinale turno A
Cervia, 6 maggio 2019

Quesiti

1. Ai minimi termini

Riducete ai minimi termini la frazione

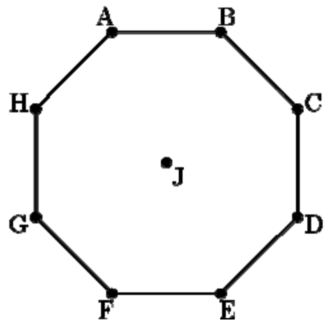
$$(1 + 3 + 5 + \ldots + 51) / (4 + 6 + 8 + \ldots + 54)$$

e riportate consecutivamente numeratore e denominatore (*ad esempio, se la frazione fosse* 5/8 *scrivete* [0508]).

2. Tre circonferenze

In un triangolo equilatero di lato 40 metri sono disegnate tre circonferenze aventi lo stesso raggio, a due a due tangenti tra loro, ciascuna delle quali tangente a due lati del triangolo. Qual è il più grande numero intero che non supera la lunghezza in decimetri del raggio delle circonferenze?

3. Tra 1 e 9



I vertici e il centro dell'ottagono regolare in figura hanno ricevuto un nome. In quanti diversi modi a ciascuno dei punti, vertici e centro, può venire assegnato un intero tra 1 e 9 in modo che punti diversi ricevano numeri diversi ma, per ogni assegnazione fissata, la somma dei tre numeri che interessano le singole diagonali passanti per il centro sia sempre la stessa al variare delle diagonali?

4. Il valore massimo

In un piano è individuato un insieme S di N punti: non ve ne sono tre collineari e i possibili quadrilateri (non intrecciati) con vertici in S sono tutti convessi. Se T è il numero dei possibili triangoli con vertici nell'insieme dato e Q è il numero dei possibili quadrilateri convessi con vertici nello stesso insieme, qual è il massimo valore possibile per $N + T + Q$ sotto il vincolo $T - Q = 5$?

5. 10 rette

Nel piano ci sono 10 rette: di queste, non ce sono due parallele, non ce sono tre incidenti in uno stesso punto, non ce ne sono quattro tangenti ad uno stesso cerchio. Quanti cerchi sono tangenti ad esattamente tre delle dieci rette?

6. Il resto

Siano p e q due numeri primi entrambi maggiori di 2019. Qual è il resto maggiore possibile per la divisione $(p^2 + q^2) : 30$?

7. Il prodotto

Per tre interi positivi A, B e C accade che

$$A + 1/(B + (1/C)) = 881/97.$$

Quanto vale il loro prodotto?

8. Banconote

Le banconote di Kanglandia sono rettangolari, ottenute accostando in linea tre quadretti della stessa misura. Per tutte il retro è grigio, mentre nell'altra faccia ognuno dei quadretti può essere giallo, rosso, verde o blu. Solo i colori (e le loro posizioni) differenziano banconote diverse. Quanti sono i tipi di banconote?

9. Un'equazione

Per ogni n intero positivo sia $f(n) = (n^2 - 3n + 3)^2 - 3(n^2 - 3n + 3) + 3$. Qual è il prodotto di tutte le soluzioni (reali) dell'equazione $f(n) = n$? (*Rispondete* [0000] *se l'equazione non ha soluzioni,* [9999] *se ne ha infinite.*)

10. L'aggiunta

In un'urna ci sono 2019 cartoncini, su ciascuno dei quali è riportato un diverso numero intero positivo da 1 a 2019. Vogliamo aggiungere nell'urna un cartoncino sul quale sia scritto un numero intero positivo n in modo che la media aritmetica dei numeri scritti sui cartoncini ora nell'urna sia maggiore di n. In quanti modi diversi possiamo scegliere n?

11. Divisibile per 3

Scegliendo a caso tre interi positivi (non necessariamente distinti) A, B, C minori o uguali a 2019, qual è la probabilità che il numero $A \times B \times C + A \times B + A$ sia divisibile per 3? (*Scrivete di seguito numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini; ad esempio, se la risposta fosse* 4/31 *scrivete* [0431].)

12. Compleanni

Oggi è il compleanno di Piero e Giovanni; la somma delle loro età è 91 anni e l'età di Giovanni è il doppio dell'età che Piero aveva quando Giovanni aveva la stessa età che adesso ha Piero. Quanti anni ha Giovanni?

13. 99 punti

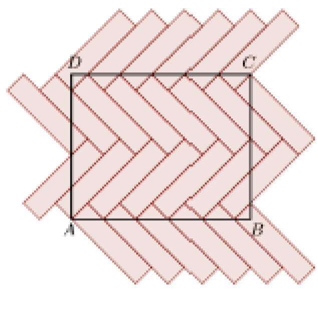
Nello spazio sono assegnati 99 punti distinti in modo che non ve ne siano quattro complanari. Alcuni punti vengono collegati da segmenti in modo che ognuno dei 99 punti sia raggiungibile (attraverso i segmenti tracciati) da ognuno degli altri (si abbia cioè un grafo connesso), ma i segmenti tracciati non formino alcun triangolo. Quale può essere al massimo il numero dei segmenti tracciati (cioè il numero degli archi del grafo)?

14. Numeri retro-sbilanciati

Diciamo che un intero positivo N di cinque cifre è *retro-sbilanciato* se, detti A l'intero di sei cifre che si ottiene anteponendo 2 alle cifre di N e B l'intero di sei cifre che si ottiene posponendo 2 alle cifre di N, si ha $B = 3A$. Quanto vale la somma delle cifre di tutti i numeri retro-sbilanciati? (*Scrivete* [0000] *se non esistono numeri retro-sbilanciati.*)

15. La percentuale

Alcuni rettangoli uguali sono disposti come mostra l'immagine e formano una figura F. All'incirca, quale percentuale di F è occupata dal rettangolo $ABCD$ disegnato su di essa? Approssimate la risposta all'intero più vicino.



Kangourou della Matematica 2019
Coppa Junior a squadre
Semifinale turno A
Cervia, 6 maggio 2019

Quesiti e soluzioni

1. Ai minimi termini

Riducete ai minimi termini la frazione

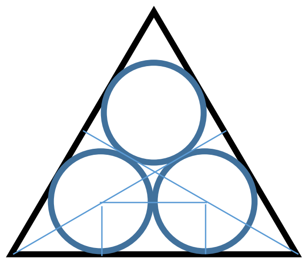
$$(1 + 3 + 5 + \ldots + 51) / (4 + 6 + 8 + \ldots + 54)$$

e riportate consecutivamente numeratore e denominatore (*ad esempio, se la frazione fosse* 5/8 *scrivete* 0508).

Risposta: 2629
Soluzione. Il numero di addendi al numeratore e al denominatore è lo stesso ed è pari (26); quindi per ottenere una frazione equivalente basta sommare il primo e l'ultimo addendo sia del numeratore sia del denominatore: 52/58 e semplificare.

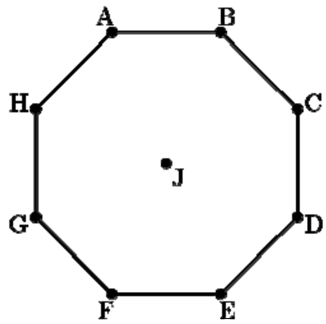
2. Tre circonferenze

In un triangolo equilatero di lato 40 metri sono disegnate tre circonferenze aventi lo stesso raggio, a due a due tangenti tra loro, ciascuna delle quali tangente a due lati del triangolo. Qual è il più grande numero intero che non supera la lunghezza in decimetri del raggio delle circonferenze?



Risposta: 0073.
Soluzione. Detta R la lunghezza del raggio, la costruzione in figura dice che $40 = 2(R + R\sqrt{3})$ e quindi $R = 40/2(1 + \sqrt{3}) = 10(\sqrt{3} - 1)$. Poiché $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ e quindi $7{,}3 = 0{,}7320 \times 10 < 10(\sqrt{3} - 1) < 0{,}74 \times 10 = 7{,}4$ si vede che la risposta è 73.

3. Tra 1 e 9



I vertici e il centro dell'ottagono regolare in figura hanno ricevuto un nome. In quanti diversi modi a ciascuno dei punti, vertici e centro, può venire assegnato un intero tra 1 e 9 in modo che punti diversi ricevano numeri diversi ma, per ogni assegnazione fissata, la somma dei tre numeri che interessano le singole diagonali passanti per il centro sia sempre la stessa al variare delle diagonali?

Risposta: 1152.
Soluzione. La somma dei primi 9 interi è 45 e le diverse diagonali passanti per il centro sono 4: allora i valori che può ricevere J devono essere tali che il loro complemento a 45 sia divisibile per 4, dunque possono essere solo 1, 5 o 9. Ciascuno di questi valori è ammissibile e le quattro coppie non ordinate dei vertici possono essere permutate in 24 modi; ognuna di queste coppie è poi passibile di ordinamento per un totale di 16 modi possibili.

4. Il valore massimo

In un piano è individuato un insieme S di N punti: non ve ne sono tre collineari e i possibili quadrilateri (non intrecciati) con vertici in S sono tutti convessi. Se T è il numero dei possibili triangoli con vertici nell'insieme dato e Q è il numero dei possibili quadrilateri convessi con vertici nello stesso insieme, qual è il massimo valore possibile per $N + T + Q$ sotto il vincolo $T - Q = 5$?

Risposta: 0041.
Soluzione. Chiaramente deve essere $N \geq 5$. Inoltre da
$T = N(N-1)(N-2)/6 = 5 + Q = 5 + N(N-1)(N-2)(N-3)/24$
si ricava $N(N-1)(N-2)(7-N) = 120$ e quindi $N < 7$.
$N = 5$ fornisce $5\times4\times3\times2 = 120$: quindi $N + T + Q = 5 + 10 + 5 = 20$;
$N = 6$ fornisce $6\times5\times4\times1 = 120$: quindi $N + T + Q = 6 + 20 + 15 = 41$.
Per ottenere 41 basta scegliere gli $N = 6$ punti su una stessa circonferenza.

5. 10 rette

Nel piano ci sono 10 rette: di queste, non ce sono due parallele, non ce sono tre incidenti in uno stesso punto, non ce ne sono quattro tangenti ad uno stesso cerchio. Quanti cerchi sono tangenti ad esattamente tre delle dieci rette?

Risposta: 0480.
Soluzione. Ogni terna di rette individua esattamente 4 cerchi tangenti e nessuno di essi è tangente a qualche retta che non sia nella terna. Le terne di rette sono 120.

6. Il resto

Siano p e q due numeri primi entrambi maggiori di 2019. Qual è il resto maggiore possibile per la divisione $(p^2 + q^2) : 30$?

Risposta: 0020.
Soluzione. Sia $0 < p = 30k + r$ con k intero non negativo maggiore possibile. Se $p > 5$ è primo, r è uno degli interi 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 i cui quadrati sono tutti congrui modulo 30 o a 1 o a 19. Lo stesso vale per q^2.

7. Il prodotto

Per tre interi positivi A, B e C accade che

$$A + 1/(B + (1/C)) = 881/97.$$

Quanto vale il loro prodotto?

Risposta: 0864.
Soluzione. Poiché $1/(B + (1/C)) < 1$, A è il quoziente 9 della divisione di 881 per 97 e $1/(B + (1/C)) = 8/97$. Similmente B è il quoziente 12 della divisione di 97 per 8 e $1/C = 1/8$.
$9\times12\times8 = 864$.

8. Banconote

Le banconote di Kanglandia sono rettangolari, ottenute accostando in linea tre quadretti della stessa misura. Per tutte il retro è grigio, mentre nell'altra faccia ognuno dei quadretti può essere giallo, rosso, verde o blu. Solo i colori (e le loro posizioni) differenziano banconote diverse. Quanti sono i tipi di banconote?

Risposta: 0040.
Soluzione. Banconote ruotate coincidono. Ci sono 4 banconote di un solo colore, 24 banconote di due colori, 12 banconote di 3 colori.

9. Un'equazione

Per ogni n intero positivo sia $f(n) = (n^2 - 3n + 3)^2 - 3(n^2 - 3n + 3) + 3$. Qual è il prodotto di tutte le soluzioni (reali) dell'equazione $f(n) = n$? (*Rispondete* [0000] *se l'equazione non ha soluzioni,* [9999] *se ne ha infinite.*)

Risposta: 0003.
Soluzione. $f(n) = (n^2 - 3n + 3)(n^2 - 3n) + 3 = n$ implica $(n^2 - 3n + 3)(n^2 - 3n) = n - 3$ e quindi o $n = 3$ o $n(n^2 - 3n + 3) = 1$, cioè $n = 1$.

10. L'aggiunta

In un'urna ci sono 2019 cartoncini, su ciascuno dei quali è riportato un diverso numero intero positivo da 1 a 2019. Vogliamo aggiungere nell'urna un cartoncino sul quale sia scritto un numero intero positivo n in modo che la media aritmetica dei numeri scritti sui cartoncini ora nell'urna sia maggiore di n. In quanti modi diversi possiamo scegliere n?

Risposta: 1009.
Soluzione. La somma dei primi 2019 interi è 2019×1010.
$(2019 \times 1010 + n)/2020 > n$ con n intero implica $n < 1010$.

11. Divisibile per 3

Scegliendo a caso tre interi positivi (non necessariamente distinti) A, B, C minori o uguali a 2019, qual è la probabilità che il numero $A \times B \times C + A \times B + A$ sia divisibile per 3? (*Scrivete di seguito numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini; ad esempio, se la risposta fosse* 4/31 *scrivete* [0431].)

Risposta: 1327
Soluzione. 2019 è divisibile per 3, dunque, per ciascuno dei numeri A, B, C, la probabilità che sia divisibile per 3 è 1/3. Per modularità, si può ridurre il problema a fare variare A, B e C nell'insieme $\{1, 2, 3\}$: facendo la lista dei casi possibili, si ottiene facilmente che la probabilità che $B \times C + B + 1$ sia divisibile per 3 è 2/9.
Allora la probabilità che né A né $B \times C + B + 1$ siano divisibili per 3 è 14/27.

12. Compleanni

Oggi è il compleanno di Piero e Giovanni; la somma delle loro età è 91 anni e l'età di Giovanni è il doppio dell'età che Piero aveva quando Giovanni aveva la stessa età che adesso ha Piero. Quanti anni ha Giovanni?

Risposta: 0052.
Soluzione. Mettiamo sull'asse dei tempi la data di nascita di Giovanni (G) e di Piero (P) e la data attuale (D):

$$G\underline{\quad}P\underline{\qquad\quad}B\underline{\quad}D$$

Dire che, in un anno B, Giovanni aveva la stessa età che Piero ha ora significa che $PD = GB$ ossia $GP = BD$ e dire che l'età di Giovanni è ora il doppio di quella che Piero aveva nell'anno B significa che $GD = 2PB$, cioè $PB = GP + BD$. Quindi $GD = 4GP$, $PD = 3GP$ e quindi $GP = 91/7 = 13$ e $GD = 13 \times 4 = 52$.

13. 99 punti

Nello spazio sono assegnati 99 punti distinti in modo che non ve ne siano quattro complanari. Alcuni punti vengono collegati da segmenti in modo che ognuno dei 99 punti sia raggiungibile (attraverso i segmenti tracciati) da ognuno degli altri (si abbia cioè un grafo connesso), ma i segmenti tracciati non formino alcun triangolo. Quale può essere al massimo il numero dei segmenti tracciati (cioè il numero degli archi del grafo)?

Risposta: 2450.
Soluzione. Per l'ipotesi di non complanarità, i triangoli che si vengono a formare possono avere come lati solo i segmenti tracciati. Sia p uno dei punti che risultano direttamente adiacenti (cioè collegati tramite un solo segmento) al maggior numero n di punti e sia S l'insieme dei punti adiacenti a p. Sia T l'insieme di $99 - n$ punti costituito da p e dai rimanenti punti. Per l'assenza di triangoli, i punti di S possono essere collegati solo a punti di T; d'altra parte i punti di T non possono avere più di n punti adiacenti ciascuno, dunque i segmenti tracciati possono essere al massimo $n(99 - n) \leq 99^2/4$. Per realizzare $2450 = [99^2/4]$ segmenti, basta isolare 49 punti e congiungere ognuno di essi ai 50 rimanenti.

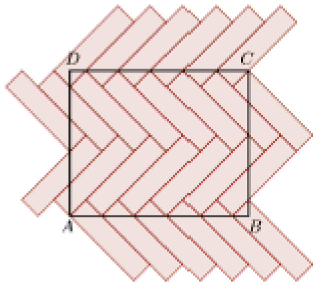
14. Numeri retro-sbilanciati

Diciamo che un intero positivo N di cinque cifre è *retro-sbilanciato* se, detti A l'intero di sei cifre che si ottiene anteponendo 2 alle cifre di N e B l'intero di sei cifre che si ottiene posponendo 2 alle cifre di N, si ha $B = 3A$. Quanto vale la somma delle cifre di tutti i numeri retro-sbilanciati? (*Scrivete* [0000] *se non esistono numeri retro-sbilanciati.*)

Risposta: 0025.
Soluzione. Fissato N, sia $A = N + 200.000$ e $B = 10N + 2$. Affinché N sia retro-sbilanciato occorre che si abbia $10N + 2 = 3N + 600.000$, cioè $7N = 599.998$, per cui $N = 85.714$ è l'unico numero retro-sbilanciato.

15. La percentuale

Alcuni rettangoli uguali sono disposti come mostra l'immagine e formano una figura F. All'incirca, quale percentuale di F è occupata dal rettangolo $ABCD$ disegnato su di essa? Approssimate la risposta all'intero più vicino.



Risposta: 0046.
Soluzione. In totale ci sono 6 + 8 + 7 + 6 = 27 rettangoli e prolungando opportunamente i lati lunghi di quattro di essi consecutivi si vede che il rettangolo ha lati in proporzione 1:4. Ci sono due modi di procedere: conteggiare le frazioni di rettangolo contenute in $ABCD$ (12 + 3/8) e fare il rapporto: 99/216 = 11/24 oppure osservare che se i rettangoli hanno lato 1 e 4 (e quindi l'area di F è 27×4 = 108) il rettangolo $ABCD$ ha lato AB lungo $11/\sqrt{2}$ e il lato AD lungo $9/\sqrt{2}$, e quindi area 11×9/2; il rapporto è come sopra e vale 0,458(3).