Quesiti

1. Trentatré

Quanti numeri interi positivi sono tali che il prodotto delle loro cifre è 33?

2. Il cubo dipinto

Si vogliono dipingere di nero alcune facce di un cubo bianco. Almeno una faccia deve risultare nera e almeno una faccia deve rimanere bianca. Quante diverse colorazioni sono possibili, intendendo uguali due colorazioni se si possono ottenere una dall'altra ruotando il cubo?

3. I salti del canguro

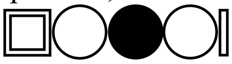
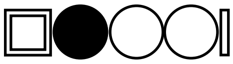
Un canguro fa sempre salti della stessa lunghezza; si muove lungo una strada rettilinea e dopo aver fatto tre salti in avanti ne fa uno indietro, poi di nuovo tre in avanti e uno indietro e così via. Misurando la strada in salti, quanti salti è lontano il canguro dal punto di partenza dopo 2019 salti?

4. Testa o croce

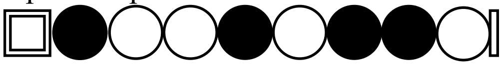
Caterina gioca a testa o croce con una moneta. La lancia sei volte di fila e considera vincente il caso in cui esce "testa" consecutivamente per esattamente 3 volte. Quante diverse sequenze che siano l'esito di sei lanci consecutivi risultano vincenti?

5. Braccialetti

Alice compone dei braccialetti di perline bianche e nere, che iniziano e finiscono con dei fermagli, seguendo questa regola: pensa un numero, lo divide per due e se non ottiene resto infila una perlina nera, se ottiene resto infila una perlina bianca; poi ripete l'operazione sul quoziente che ha ottenuto con la divisione precedente e va avanti così finché non ottiene come quoziente 1: a questo punto infila una perlina bianca (e aggiunge il fermaglio di chiusura). Ad esempio, qui sotto vedete a sinistra il risultato se pensa 5, a destra il risultato se pensa 6:

(la forma non circolare a sinistra rappresenta il fermaglio che ha messo prima di iniziare il lavoro, quella a destra rappresenta il fermaglio che ha messo alla fine).
Che numero deve avere pensato per comporre il braccialetto che vedete qui sotto?



6. I quadrati perfetti

A, B e C sono tre cifre e A è diversa da 0. I tre numeri A, AB e BC ottenuti accostandole possono tutti esprimere l'area (in centimetri quadrati) di quadrati con un lato che misuri un numero intero di centimetri. Che numero è ABC?

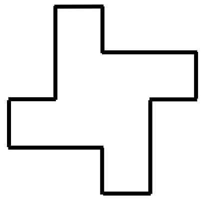
7. Numeri pari

Quanti sono i numeri interi pari che sono più grandi di 987.654.321, più piccoli di 1234.567.890 e le cui ultime sei cifre sono tutte uguali tra loro?

8. Le figurine

Una scatola contiene figurine triangolari e figurine quadrate, per un totale di 653 figurine. Contando i lati di tutte le figurine si ottiene 2019. Quante sono le figurine quadrate?

9. Il poligono



Nel poligono in figura gli otto lati corti hanno la stessa lunghezza e i quattro lati lunghi hanno la stessa lunghezza, doppia della precedente. Inoltre lati consecutivi sono perpendicolari tra loro. Se il poligono ha area 200 cm^2, quanti centimetri è lungo il suo perimetro?

10. Anni meravigliosi

Diciamo che un anno è *meraviglioso* se con le sue cifre si possono comporre due numeri consecutivi di due cifre significative (cioè numeri che non si possono scrivere con una sola cifra): ad esempio il 1330 fu un anno meraviglioso. Quanti anni meravigliosi ci sono nel 21-esimo secolo?

11. Quattro cifre

Determinate il più grande intero di quattro cifre tutte diverse tra loro che sia divisibile (senza resto) per ciascuna delle sue quattro cifre.

12. Numeri su un triangolo

Inserisci in ogni vertice e in ogni punto medio dei lati di un triangolo equilatero un diverso numero tra 1, 2, 3, 4, 5, 6 in modo che la somma dei numeri scritti su ogni lato sia 11. Quanto vale la somma dei numeri scritti nei punti medi?

13. Tre leoni

Tre leoni (padre, madre e cucciolo) vivono in una caverna. Essi ruggiscono seguendo questa regola: ogni tre ruggiti (anche non consecutivi) del padre, la madre risponde con due ruggiti; ogni cinque ruggiti (anche non consecutivi) della madre il cucciolo risponde con tre ruggiti, ma talora madre e cucciolo ruggiscono anche non in risposta. Oggi ciascun leone ha ruggito esattamente 32 volte. Quanti di questi ruggiti non sono state risposte ad altri ruggiti?

14. Cubi inscatolati

Usando cubetti tutti di 1 cm di lato, costruiamo dei cubi più grandi. Diciamo che un cubo "inscatola" un cubo più piccolo quando lo contiene in modo che nessun punto del cubo più piccolo rimanga visibile, in altre parole, quando lo avvolge completamente. Sono partito da un cubetto: usando altri 26 cubetti, ho costruito il più piccolo cubo che lo inscatola. Ora voglio costruire il più piccolo cubo che inscatoli anche questo nuovo cubo: quanti cubetti devo aggiungere?

15. Il serbatoio

Un serbatoio può essere riempito con 10 rubinetti. Uno di essi lo può riempire in un giorno; due dei rimanenti possono riempirlo ciascuno in due giorni, tre dei rimanenti possono riempirlo ciascuno in tre giorni e gli ultimi quattro possono riempirlo ciascuno in quattro giorni. Se tutti i rubinetti vengono aperti simultaneamente, in quante ore si riempie il serbatoio?

Quesiti e soluzioni

1. Trentatré

Quanti numeri interi positivi sono tali che il prodotto delle loro cifre è 33?

Risposta: 0000.
Soluzione. Il numero 33 è prodotto di 3 e 11 che sono numeri primi (cioè non sono prodotti di numeri >1 e più piccoli di essi stessi): quindi non esiste alcun numero di due o più cifre il cui prodotto sia 33.

2. Il cubo dipinto

Si vogliono dipingere di nero alcune facce di un cubo bianco. Almeno una faccia deve risultare nera e almeno una faccia deve rimanere bianca. Quante diverse colorazioni sono possibili, intendendo uguali due colorazioni se si possono ottenere una dall'altra ruotando il cubo?

Risposta: 0008.
Soluzione. Le possibili colorazioni sono: una sola faccia nera (e la duale: una sola bianca); due casi di coppia di facce nere, opposte o consecutive (e le duali bianche); due casi con 3 facce nere, convergenti in un vertice oppure su una stessa superficie laterale (ognuno di questi casi coincide con quello dello stesso tipo che riguarda 3 facce bianche). In totale: 2+4+2 = 8.

3. I salti del canguro

Un canguro fa sempre salti della stessa lunghezza; si muove lungo una strada rettilinea e dopo aver fatto tre salti in avanti ne fa uno indietro, poi di nuovo tre in avanti e uno indietro e così via. Misurando la strada in salti, quanti salti è lontano il canguro dal punto di partenza dopo 2019 salti?

Risposta: 1011.
Soluzione. Infatti ogni 4 salti avanza di 2; quindi con i primi 2016 salti avanza di 1008 salti e dai restanti 3 non torna indietro.

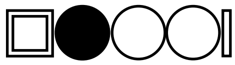
4. Testa o croce

Caterina gioca a testa o croce con una moneta. La lancia sei volte di fila e considera vincente il caso in cui esce "testa" consecutivamente per esattamente 3 volte. Quante diverse sequenze che siano l'esito di sei lanci consecutivi risultano vincenti?

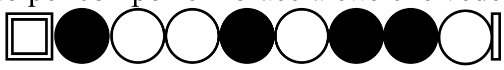
Risposta: 0012.
Soluzione. Ovviamente il blocco *TTT* può presentarsi a inizio (o fine sequenza) e, in tal caso, dopo (o prima del) l'uscita di *C* ci sono 4 uscite possibili, oppure dopo una prima (o prima di un'ultima) uscita di *C* e in tal caso in coda (o in testa) ci sono 2 uscite possibili. In totale: 12.

5. Braccialetti

Alice compone dei braccialetti di perline bianche e nere, che iniziano e finiscono con dei fermagli, seguendo questa regola: pensa un numero, lo divide per due e se non ottiene resto infila una perlina nera, se ottiene resto infila una perlina bianca; poi ripete l'operazione sul quoziente che ha ottenuto con la divisione precedente e va avanti così finché non ottiene come quoziente 1: a questo punto infila una perlina bianca (e aggiunge il fermaglio di chiusura). Ad esempio, qui sotto vedete a sinistra il risultato se pensa 5, a destra il risultato se pensa 6:

(la forma non circolare a sinistra rappresenta il fermaglio che ha messo prima di iniziare il lavoro, quella a destra rappresenta il fermaglio che ha messo alla fine).
Che numero deve avere pensato per comporre il braccialetto che vedete qui sotto?



Risposta: 150.
Soluzione. Contando le perline si vede che Alice ha fatto 8 – 1 = 7 divisioni per 2, l'ultima con quoziente 1.
Si può ricostruire il numero di Alice partendo dalla fine (cioè esaminando il braccialetto da destra a sinistra), ogni volta moltiplicando il numero ottenuto al passaggio precedente per 2 e aggiungendo resto 0 se la perlina a sinistra è nera e resto 1 se è bianca.
Quindi si inizia con
$0 + 2 \times 1 = 2$
$0 + 2 \times (0 + 2 \times 1) = 4$
$1 + 2 \times (0 + 2 \times (0 + 2 \times 1)) = 9$
e così via fino a $0 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2 \times (0 + 2 \times (1 + 2 \times (0 + 2 \times (0 + 2\times1)))))) =150$.

Alternativamente. Se tutte le perline tranne l'ultima fossero nere il numero sarebbe $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$: ma ci sono altre tre perline bianche; per ognuna di esse si può rifare il ragionamento come se fosse l'ultima del braccialetto: la quinta perlina bianca dice che a 128 si deve aggiungere $2\times2\times2\times2=16$, la terza e la seconda dicono (come visto nell'esempio) che a 128 + 16 si devono aggiungere 4 e 2. Quindi il braccialetto rappresenta il numero $2+4+16+128=150$.

La costruzione descritta nel testo è quella che permette di passare dalla rappresentazione decimale di un numero a quella binaria (perlina nera=0, perlina bianca=1: in rappresentazione binaria 150 è rappresentato da 10010110, che corrisponde alla sequenza dei resti letta da destra a sinistra).

6. I quadrati perfetti

A, *B* e *C* sono tre cifre e *A* è diversa da 0. I tre numeri *A*, *AB* e *BC* ottenuti accostandole possono tutti esprimere l'area (in centimetri quadrati) di quadrati con un lato che misuri un numero intero di centimetri. Che numero è *ABC*?

Risposta: 0164.
Soluzione. *A* potrebbe essere 1, 4 o 9, ma non ci sono quadrati di due cifre con cifra delle decine 9 e quindi può valere solo 1. Quindi $B = 6$ e $C = 4$.

7. Numeri pari

Quanti sono i numeri interi pari che sono più grandi di 987.654.321, più piccoli di 1234.567.890 e le cui ultime sei cifre sono tutte uguali tra loro?

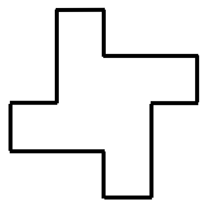
Risposta: 1235.
Soluzione. Si va da 987.666.666 a 1234.444.444; dato che le ultime cifre sono uguali, basta conteggiare i numeri pari da 9876 a 12344 compresi. Quelli non necessariamente pari sono 12345 – 9876 = 2369, i pari sono la metà di questi, arrotondata per eccesso (visto che il primo e l'ultimo numero sono pari).

8. Le figurine

Una scatola contiene figurine triangolari e figurine quadrate, per un totale di 653 figurine. Contando i lati di tutte le figurine si ottiene 2019. Quante sono le figurine quadrate?

Risposta: 0060.
Soluzione. Se tutte le figurine fossero triangolari, i lati sarebbero 1959, cioè 60 in meno di 2019.

9. Il poligono



Nel poligono in figura gli otto lati corti hanno la stessa lunghezza e i quattro lati lunghi hanno la stessa lunghezza, doppia della precedente. Inoltre lati consecutivi sono perpendicolari tra loro. Se il poligono ha area 200 cm^2, quanti centimetri è lungo il suo perimetro?

Risposta: 0080.
Soluzione. Il poligono è formato da 4 rettangoli, ognuno dei quali ha area 50 cm^2; orlando la figura con altri 4 rettangoli uguali si ha un quadrato di area 400 cm^2, che quindi ha lato 20 cm e perimetro 80 cm; tale perimetro coincide ovviamente con quello della figura data.

10. Anni meravigliosi

Diciamo che un anno è *meraviglioso* se con le sue cifre si possono comporre due numeri consecutivi di due cifre significative (cioè numeri che non si possono scrivere con una sola cifra): ad esempio il 1330 fu un anno meraviglioso. Quanti anni meravigliosi ci sono nel 21-esimo secolo?

Risposta: 0006.
Soluzione. Due cifre sono fisse, poiché tutti gli anni (escluso il 2100) iniziano con 20; quindi si può avere 19 e 20 o 20 e 21 o 29 e 30: 2019, 2091, 2012, 2021, 2039, 2093.

11. Quattro cifre

Determinate il più grande intero di quattro cifre tutte diverse tra loro che sia divisibile (senza resto) per ciascuna delle sue quattro cifre.

Risposta: 9864.
Soluzione. Dato che si chiede "il numero più grande", come cifra delle migliaia si deve scegliere 9 e quindi, se si vuole che il numero risulti divisibile per 9, come somma delle altre tre cifre si deve scegliere 18 (oppure 9, ma il numero risulterà inferiore a quelli che si possono trovare con 18). È evidente che la partizione 18 = 4 + 6 + 8 fornisce 9864, che rispetta tutte le condizioni, salvo eventualmente quella di massimo. Invece nessuna delle altre due partizioni di 18 come somma di cifre distinte e diverse da 9 (3 + 7 + 8 = 5 + 6 + 7) soddisfa la condizione che il numero di 4 cifre sia divisibile per ciascuna delle sue cifre. La prima non va bene poiché il numero dovrebbe essere divisibile per 8 e quindi essere pari, ma né 9378 né 9738 sono divisibili per 8; la seconda non va bene perché il numero dovrebbe essere pari e divisibile per 5 e quindi per 10, ma allora terminerebbe per 0.

12. Numeri su un triangolo

Inserisci in ogni vertice e in ogni punto medio dei lati di un triangolo equilatero un diverso numero tra 1, 2, 3, 4, 5, 6 in modo che la somma dei numeri scritti su ogni lato sia 11. Quanto vale la somma dei numeri scritti nei punti medi?

Risposta: 0009.
Soluzione. La somma dei sei numeri è 21, mentre contando due volte i vertici si ottiene $11 \times 3 = 33$; quindi 12 è la somma dei numeri nei vertici e 9 è la somma dei numeri nei punti medi. Si può anche fare materialmente inserendo ad es. le terne 4,5,2; 2,3,6; 6,1,4.

13. Tre leoni

Tre leoni (padre, madre e cucciolo) vivono in una caverna. Essi ruggiscono seguendo questa regola: ogni tre ruggiti (anche non consecutivi) del padre, la madre risponde con due ruggiti; ogni cinque ruggiti (anche non consecutivi) della madre il cucciolo risponde con tre ruggiti, ma talora madre e cucciolo ruggiscono anche non in risposta. Oggi ciascun leone ha ruggito esattamente 32 volte. Quanti di questi ruggiti non sono state risposte ad altri ruggiti?

Risposta: 0058.
Soluzione. 30 dei ruggiti del padre han provocato 20 ruggiti della madre (e quindi 12 non sono in risposta); 30 dei ruggiti della madre han provocato 18 ruggiti del piccolo (e quindi 14 non sono in risposta). Quelli del padre non lo sono mai; quindi $32 + 12 + 14 = 58$ non sono in risposta.

14. Cubi inscatolati

Usando cubetti tutti di 1 cm di lato, costruiamo dei cubi più grandi. Diciamo che un cubo "inscatola" un cubo più piccolo quando lo contiene in modo che nessun punto del cubo più piccolo rimanga visibile, in altre parole, quando lo avvolge completamente. Sono partito da un cubetto: usando altri 26 cubetti, ho costruito il più piccolo cubo che lo inscatola. Ora voglio costruire il più piccolo cubo che inscatoli anche questo nuovo cubo: quanti cubetti devo aggiungere?

Risposta: 0098.
Soluzione. Il secondo cubetto costruito ha uno spigolo di 3 cubetti, quello che sarà costruito per ultimo di 5: quindi devo aggiungere $125 – 27 = 98$ cubetti.

15. Il serbatoio

Un serbatoio può essere riempito con 10 rubinetti. Uno di essi lo può riempire in un giorno; due dei rimanenti possono riempirlo ciascuno in due giorni, tre dei rimanenti possono riempirlo ciascuno in tre giorni e gli ultimi quattro possono riempirlo ciascuno in quattro giorni. Se tutti i rubinetti vengono aperti simultaneamente, in quante ore si riempie il serbatoio?

Risposta: 0006.
Soluzione. È come se lavorassero 4 rubinetti uguali al primo e quindi impiegano $24/4=6$ ore.