



Kangourou della Matematica 2019  
Coppa Kangourou a squadre  
Semifinale turno A  
Cervia, 3 maggio 2019



## Quesiti

### 1. La sostituzione

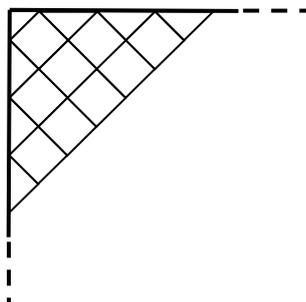
Se sostituite i numeri  $N = 1, 2, 3, \dots$  nell'espressione  $N^2 - 2019N + 2019$  ottenete una successione di numeri interi. Quanto vale la differenza tra il numero al 2019-esimo posto e quello al 2018-esimo?

### 2. La barca

Una barca viaggia alla velocità costante di 4 chilometri all'ora. Quando è a 2 chilometri dalla costa, inizia ad imbarcare acqua: 32 litri al minuto. Può imbarcare al massimo 150 litri d'acqua senza affondare. Si mette in funzione subito una pompa per svuotarla di almeno parte dell'acqua imbarcata. Se la pompa lavora in maniera costante, quanti litri d'acqua al minimo dovrà essere in grado di espellere ogni minuto, se si vuole che la barca raggiunga la riva prima di affondare?

### 3. Più cento

Qual è il più grande intero positivo  $n$  tale che  $n^2 + 100$  sia divisibile per  $n - 5$ ?



### 4. La stanza

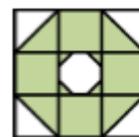
La figura ti mostra uno qualunque dei quattro angoli del pavimento di una stanza quadrata tutta pavimentata nello stesso modo. Le piastrelle sono triangoli rettangoli isosceli oppure quadrati, questi tutti della stessa dimensione. I cateti delle piastrelle d'angolo misurano 25 cm. Contando i lati di tutte le piastrelle, comprese quelle al bordo del pavimento, ma contando una sola volta i lati comuni a due piastrelle, si ottiene come risultato 3028. Quanti centimetri misura il lato della stanza?

### 5. Almeno un punto interno

In una griglia a celle quadrate  $25 \times 30$ , quanti sono i lati delle celle che abbiano almeno un punto interno alla griglia?

### 6. Il muro piastrellato

Un muro è piastrellato con piastrelle quadrate di lato 30 cm, che hanno una decorazione tale che, quando 9 di esse vengono accostate, si vedono due ottagoni (non regolari) simili. Quanti centimetri quadrati misura la regione compresa tra i due ottagoni?

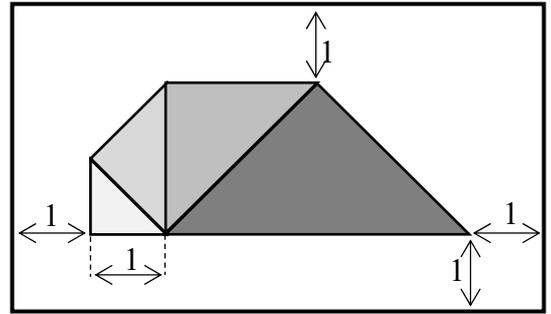


### 7. Il funambolo

Una fune elastica era tesa orizzontalmente tra due pali. Un funambolo ha iniziato a camminarci sopra e ora si trova nel punto centrale della fune: la fune si è allungata uniformemente di 20 cm e il suo punto medio si è abbassato di 90 cm. Quanti centimetri misurava originariamente la fune?

## 8. Quattro triangoli

La figura mostra un foglio nel quale è evidenziata una regione costituita dall'accostamento di 4 triangoli rettangoli isosceli. L'ipotenusa del più piccolo è un cateto del secondo, l'ipotenusa del secondo è un cateto del terzo e l'ipotenusa del terzo è un cateto del quarto. Sono indicate alcune misure in decimetri tra cui anche le distanze della regione dai bordi del foglio. Di quanti decimetri quadrati è l'area del foglio?



## 9. Poligono convesso

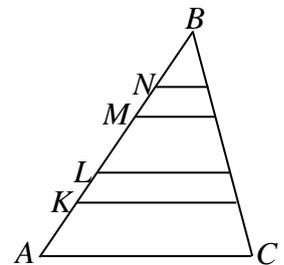
Scegliendo a caso due vertici di un poligono convesso, la probabilità che siano vertici di una diagonale è 0,8. Quanti lati ha il poligono?

## 10. Quadrati perfetti

Quanti sono i numeri naturali minori di 9200 che sono quadrati perfetti e hanno 6 come cifra delle unità?

## 11. Il triangolo affettato

I quattro punti  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  che nel disegno vedi segnati sul lato  $AB$  del triangolo  $ABC$  sono tali che il segmento  $AK$  risulti congruente a  $NB$  e il segmento  $KL$  risulti congruente a  $MN$ . Da ciascuno dei quattro punti è stato tracciato un segmento parallelo ad  $AC$  avente il secondo estremo sul lato  $BC$ . Qual è la somma delle lunghezze di questi quattro segmenti, se  $AC$  è lungo 8?



## 12. La pulce

Una griglia quadrata è ottenuta accostando  $100 \times 100$  celle quadrate identiche. Una pulce si trova nel punto al centro della griglia (vertice di quattro celle); può muoversi saltando solo lungo i lati delle celle, con salti lunghi quanto un lato e ad ogni salto allontanandosi dal vertice di partenza. Dopo 30 salti, quanti sono i diversi punti in cui potrebbe venirsi a trovare?

## 13. Il parallelepipedo

In un parallelepipedo rettangolo i centri delle sei facce sono i vertici di un ottaedro. Se le dimensioni del parallelepipedo sono  $15 \times 10 \times 18$ , qual è il volume dell'ottaedro?

## 14. Coordinate intere

Nel piano cartesiano considerate il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(4200, 3000)$ . Quanti sono, esclusi gli estremi, i suoi punti a coordinate entrambe intere?

## 15. AGRO

Ho sostituito ogni lettera della parola *KANGAROO* con una cifra da 1 a 9 (lettere uguali con cifre uguali, lettere diverse con cifre diverse) in modo che il risultante sia il più grande numero di 8 cifre (di questa forma) divisibile per 15. Con le stesse sostituzioni, che numero corrisponde ad *AGRO*?



Kangourou della Matematica 2019  
Coppa Kangourou a squadre  
Semifinale turno A  
Cervia, 3 maggio 2019



## Quesiti e svolgimenti

### 1. La sostituzione

Se sostituite i numeri  $N = 1, 2, 3, \dots$  nell'espressione  $N^2 - 2019N + 2019$  ottenete una successione di numeri interi. Quanto vale la differenza tra il numero al 2019-esimo posto e quello al 2018-esimo?

**Risposta: 2018.**

**Soluzione.**  $2019^2 - 2019 \times 2019 - (2018^2 - 2019 \times 2018)$ .

### 2. La barca

Una barca viaggia alla velocità costante di 4 chilometri all'ora. Quando è a 2 chilometri dalla costa, inizia ad imbarcare acqua: 32 litri al minuto. Può imbarcare al massimo 150 litri d'acqua senza affondare. Si mette in funzione subito una pompa per svuotarla di almeno parte dell'acqua imbarcata. Se la pompa lavora in maniera costante, quanti litri d'acqua al minimo dovrà essere in grado di espellere ogni minuto, se si vuole che la barca raggiunga la riva prima di affondare?

**Risposta: 0027.**

**Soluzione.** Alla peggio, si può arrivare ad avere imbarcato 150 litri d'acqua dopo 30 minuti, cioè 5 litri al minuto (risposta 27).

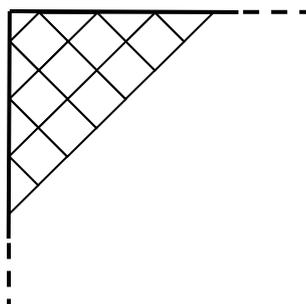
### 3. Più cento

Qual è il più grande intero positivo  $n$  tale che  $n^2 + 100$  sia divisibile per  $n - 5$ ?

**Risposta: 0130.**

**Soluzione.** Si ha  $n^2 + 100 = n^2 - 25 + 125 = (n - 5)(n + 5) + 125$ . Il massimo intero che divide 125 è 125 stesso, dunque  $n - 5 = 125$ .

### 4. La stanza



La figura ti mostra uno qualunque dei quattro angoli del pavimento di una stanza quadrata tutta pavimentata nello stesso modo. Le piastrelle sono triangoli rettangoli isosceli oppure quadrati, questi tutti della stessa dimensione. I cateti delle piastrelle d'angolo misurano 25 cm. Contando i lati di tutte le piastrelle, comprese quelle al bordo del pavimento, ma contando una sola volta i lati comuni a due piastrelle, si ottiene come risultato 3028. Quanti centimetri misura il lato della stanza?

**Risposta: 1350.**

**Soluzione.** Detto  $n$  il numero di piastrelle quadrate che si trovano su ogni fila che ha un vertice su un lato della stanza, la misura di tale lato è  $50n$ . Il numero di lati delle piastrelle è chiaramente  $4n^2 + 4(n + 1)$ . Da  $n^2 + n = 756$  si ricava  $n = 27$ .

### 5. Almeno un punto interno

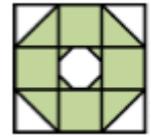
In una griglia a celle quadrate  $25 \times 30$ , quanti sono i lati delle celle che abbiano almeno un punto interno alla griglia?

**Risposta: 1445.**

**Soluzione.**  $24 \times 30 + 25 \times 29$ .

## 6. Il muro piastrellato

Un muro è piastrellato con piastrelle quadrate di lato 30 cm, che hanno una decorazione tale che, quando 9 di esse vengono accostate, si vedono due ottagoni (non regolari) simili. Quanti centimetri quadrati misura la regione compresa tra i due ottagoni?



**Risposta: 5600.**

**Soluzione.** I triangoli più piccoli hanno dimensioni che sono la terza parte di quelli più grandi. Quindi la somma delle aree dei quattro triangoli più grandi è  $2 \times 900 = 1800 \text{ cm}^2$ , mentre quella delle aree dei quattro più piccoli è  $200 \text{ cm}^2$ ; sommate a quelle dei quattro quadrati  $4 \times 900 = 3600 \text{ cm}^2$ , si ha  $5600 \text{ cm}^2$ .

## 7. Il funambolo

Una fune elastica era tesa orizzontalmente tra due pali. Un funambolo ha iniziato a camminarci sopra e ora si trova nel punto centrale della fune: la fune si è allungata uniformemente di 20 cm e il suo punto medio si è abbassato di 90 cm. Quanti centimetri misurava originariamente la fune?

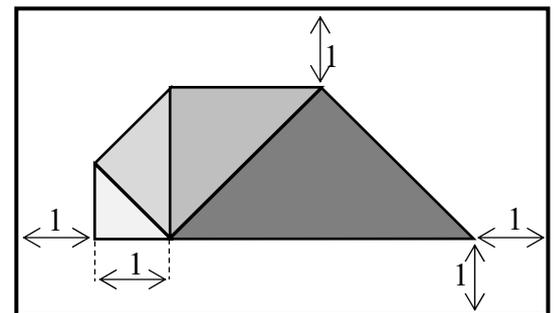
**Risposta: 0800.**

**Soluzione.** Detta  $2x$  la lunghezza iniziale si ha  $(x+10)^2 = x^2 + 90^2$  cioè  $20x = 90^2 - 10^2 = 8000$  e quindi  $2x = 800$ .



## 8. Quattro triangoli

La figura mostra un foglio nel quale è evidenziata una regione costituita dall'accostamento di 4 triangoli rettangoli isosceli. L'ipotenusa del più piccolo è un cateto del secondo, l'ipotenusa del secondo è un cateto del terzo e l'ipotenusa del terzo è un cateto del quarto. Sono indicate alcune misure in decimetri tra cui anche le distanze della regione dai bordi del foglio. Di quanti decimetri quadrati è l'area del foglio?



**Risposta: 0028.**

**Soluzione.** L'altezza della regione è 2 dm, la base misura 5 dm.

## 9. Poligono convesso

Scegliendo a caso due vertici di un poligono convesso, la probabilità che siano vertici di una diagonale è 0,8. Quanti lati ha il poligono?

**Risposta: 0011.**

**Soluzione.** Se i lati sono  $n$ , le coppie di vertici non consecutivi sono  $n(n-1)/2 - n$  e  $n(n-1)/2 - n = 0,8 \times n(n-1)/2$  per  $n = 11$ .

## 10. Quadrati perfetti

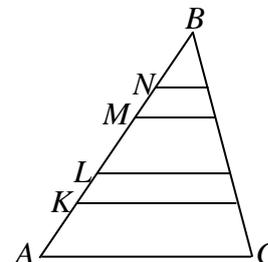
Quanti sono i numeri naturali minori di 9200 che sono quadrati perfetti e hanno 6 come cifra delle unità?

**Risposta: 0019.**

**Soluzione.** Si deve partire da un numero della forma  $N4$  oppure  $N6$ ; per ogni  $N$  da 0 a 8 ci sono due casi, per  $N=9$  solo 94 ( $94^2 = 8836$ ), poiché  $96^2 = 9216 > 9200$ .

## 11. Il triangolo affettato

I quattro punti  $K, L, M, N$  che nel disegno vedi segnati sul lato  $AB$  del triangolo  $ABC$  sono tali che il segmento  $AK$  risulti congruente a  $NB$  e il segmento  $KL$  risulti congruente a  $MN$ . Da ciascuno dei quattro punti è stato tracciato un segmento parallelo ad  $AC$  avente il secondo estremo sul lato  $BC$ . Qual è la somma delle lunghezze di questi quattro segmenti, se  $AC$  è lungo 8?



**Risposta: 0016.**

**Soluzione.** Considerare il parallelogramma  $ACDB$  ottenuto tracciando le parallele ad  $AB$  e  $AC$ , rispettivamente da  $C$  e  $B$  e prolungare le parallele di cui si parla nel testo. Essendo i due triangoli  $ABC$  e  $DCB$  (e le rispettive decorazioni a fasce parallele) congruenti si vede che la somma di lunghezze di cui parla il testo coincide con la somma delle lunghezze di due segmenti paralleli ad  $AC$  e lunghi come  $AC$ : quindi è 16.

## 12. La pulce

Una griglia quadrata è ottenuta accostando  $100 \times 100$  celle quadrate identiche. Una pulce si trova nel punto al centro della griglia (vertice di quattro celle); può muoversi saltando solo lungo i lati delle celle, con salti lunghi quanto un lato e ad ogni salto allontanandosi dal vertice di partenza. Dopo 30 salti, quanti sono i diversi punti in cui potrebbe venirsi a trovare?

**Risposta: 0120.**

**Soluzione.** Pensando la posizione iniziale della pulce come origine di un sistema cartesiano, con assi sovrapposti ai lati delle quattro celle centrali e unità di misura pari al lato di una cella, si vede che sono tanti quanti le coppie soluzioni in interi di  $|x| + |y| = 30$ .

## 13. Il parallelepipedo

In un parallelepipedo rettangolo i centri delle sei facce sono i vertici di un ottaedro. Se le dimensioni del parallelepipedo sono  $15 \times 10 \times 18$ , qual è il volume dell'ottaedro?

**Risposta: 0450.**

**Soluzione.** L'ottaedro è ottenibile unendo due identiche piramidi rette "opposte", ciascuna avente per base uno stesso rombo, di area la metà del prodotto delle misure di due degli spigoli del parallelepipedo:  $150 \times 9/3$ .

## 14. Coordinate intere

Nel piano cartesiano considerate il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(4200, 3000)$ . Quanti sono, esclusi gli estremi, i suoi punti a coordinate entrambe intere?

**Risposta: 0599.**

**Soluzione.** Dato che  $\text{MCD}(4200, 3000) = 600$ , non ci saranno coppie di coordinate entrambe intere con valori inferiori a  $(7, 5)$  e in totale le coppie, esclusa  $(4200, 3000)$ , saranno  $600 - 1$ .

## 15. AGRO

Ho sostituito ogni lettera della parola *KANGAROO* con una cifra da 1 a 9 (lettere uguali con cifre uguali, lettere diverse con cifre diverse) in modo che il risultante sia il più grande numero di 8 cifre (di questa forma) divisibile per 15. Con le stesse sostituzioni, che numero corrisponde ad *AGRO*?

**Risposta: 8635.**

**Soluzione.** La lettera  $O$  deve essere sostituita con 5;  $K$  con 9,  $A$  con 8 e le restanti tre lettere  $N, G, R$  devono essere sostituite con numeri tali che  $8 > N > G > R$  e  $35 + N + G + R$  sia divisibile per 3:  $N = 7, G = 6$  implica  $R = 3$  (dovendo la cifra essere diversa da 6 e 9).