Kangourou della Matematica 2018
finale nazionale italiana
Cervia, 29 settembre 2018

LIVELLO JUNIOR

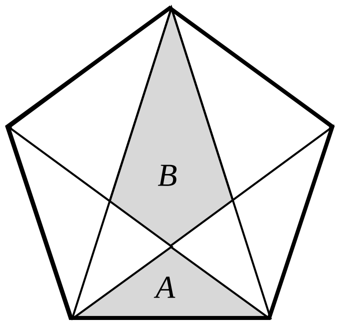
Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (*5 punti*) Antonia e Luca si giocano a testa o croce la cifra di 8 euro, lanciando una moneta non truccata. Decidono che la cifra sarà intascata dal primo di loro che avrà avuto 6 lanci a proprio favore. Quando sono sul punteggio di 5 per Antonia e 3 per Luca, sono però costretti ad interrompere il gioco e discutono su come spartirsi gli 8 euro (che nessuno finora ha vinto). Qual è il modo equo di spartirli (cioè il modo che tiene conto della probabilità di vittoria che ognuno dei due ha al momento dell'interruzione)?

J2. (*7 punti*) I lati di un quadrilatero misurano 1, 4, 7, 8. Quanto può essere la sua area, al massimo?

J3. (*11 punti*) Da un mazzo standard di 52 carte, Chiara ha scartato alcune carte, assicurandosi che nel mazzo residuo restassero tutti e quattro gli assi. Ora estrae quattro carte a caso da questo mazzo ridotto. Se la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è 1/1001, quante carte ha buttato via?

J4. (*14 punti*) In figura vedi un pentagono regolare di cui sono state tracciate quattro diagonali che individuano due regioni ombreggiate *A* e *B*. Esprimi l'area di *B* in dipendenza dall'area di *A*.



J5. (*18 punti*) Considera già dimostrato il fatto che l'equazione $x^5 + x = 10$ ammette un'unica soluzione (reale positiva). Dimostra che tale soluzione non è un numero razionale (cioè non può essere espressa come quoziente di due numeri interi).

J6. (*22 punti*) Immagina il piano come un foglio a quadretti (tutti dello stesso lato) illimitato in ogni direzione e chiama *nodo* ogni vertice di ogni quadrato. Dimostra che per ogni *n* esiste un cerchio contenente all'interno esattamente *n* nodi.

LIVELLO JUNIOR

Soluzioni e svolgimenti

J1. (*5 punti*) Antonia e Luca si giocano a testa o croce la cifra di 8 euro, lanciando una moneta non truccata. Decidono che la cifra sarà intascata dal primo di loro che avrà avuto 6 lanci a proprio favore. Quando sono sul punteggio di 5 per Antonia e 3 per Luca, sono però costretti ad interrompere il gioco e discutono su come spartirsi gli 8 euro (che nessuno finora ha vinto). Qual è il modo equo di spartirli (cioè il modo che tiene conto della probabilità di vittoria che ognuno dei due ha al momento dell'interruzione)?

Risposta: 7 euro ad Antonia e 1 a Luca.
Soluzione. Immaginiamo che il gioco vada comunque avanti per 3 lanci (anche se Antonia vincesse prima): si avrebbe senz'altro il vincitore. 3 lanci hanno, nel complesso, 8 esiti possibili. Di questi 8, solo uno darebbe la vittoria a Luca.

J2. (*7 punti*) I lati di un quadrilatero misurano 1, 4, 7, 8. Quanto può essere la sua area, al massimo?

Risposta: 18.
Soluzione. È chiaro che, perché l'area sia massima, il quadrilatero deve quantomeno essere convesso. Inoltre si può supporre che le lunghezze dei lati consecutivi si susseguano in un qualunque ordine prefissato; infatti se ciò non accade, basta scomporre il quadrilatero in due triangoli mediante una diagonale e simmetrizzarne uno rispetto all'asse della diagonale stessa per ottenere un nuovo quadrilatero (ovviamente con la stessa area) in cui accade. Ciascuno dei due triangoli in cui una diagonale scompone il quadrilatero ha area che, mantenendo costanti le misure dei due lati appartenenti al quadrilatero, è massima quando tali lati sono perpendicolari. Si tratta quindi di trovare coppie di lati che possano essere cateti di due triangoli rettangoli con ugual ipotenusa. È immediato che $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$, dunque accostando due triangoli rettangoli di cateti {1 e 8} e {4 e 7} si ottiene il quadrilatero cercato, che ha area $1 \times 8/2 + 4 \times 7/2 = 18$.

J3. (*11 punti*) Da un mazzo standard di 52 carte, Chiara ha scartato alcune carte, assicurandosi che nel mazzo residuo restassero tutti e quattro gli assi. Ora estrae quattro carte a caso da questo mazzo ridotto. Se la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è 1/1001, quante carte ha buttato via?

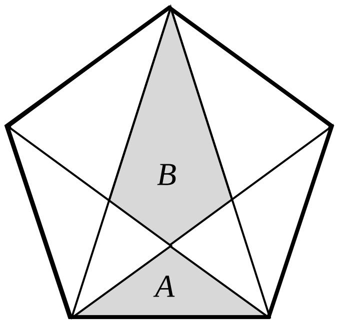
Risposta: 38.

Soluzione. Se le carte residue sono n, la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è

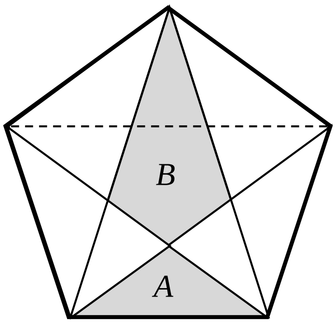
$$p = \frac{4}{n} \times \frac{3}{n-1} \times \frac{2}{n-2} \times \frac{1}{n-3}.$$

p = 1/1001 equivale a $n(n-1)(n-2)(n-3) = 24024$. Non potendo chiaramente essere $n < 10$, né n compreso tra 10 e 13 (inclusi), poiché uno dei quattro fattori sarebbe 10, deve essere $n \geq 14$. Si verifica subito che deve essere proprio $n = 14$.

J4. (*14 punti*) In figura vedi un pentagono regolare di cui sono state tracciate quattro diagonali che individuano due regioni ombreggiate *A* e *B*. Esprimi l'area di *B* in dipendenza dall'area di *A*.

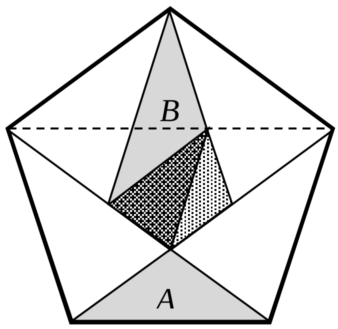


Risposta: l'area di *B* è il doppio di quella di *A*.



Soluzione. Sia *a* l'area di *A*. Tracciando la diagonale mancante del pentagono, il pentagono risulta suddiviso in un pentagono centrale di area *p*, in 5 triangoli fra loro congruenti di area *a* un lato dei quali è un lato del pentagono originale e 5 altri triangoli fra loro congruenti di area *b* un lato dei quali è un lato del pentagono centrale. Osservando, ad esempio, uno dei parallelogrammi formati da due lati (consecutivi) del pentagono originale e parte di due delle diagonali, si ricava immediatamente $2a + b = p + 2b$, cioè $p = 2a - b$, da cui segue che l'area di *B* è il doppio dell'area di *A*.

Soluzione alternativa. In ogni pentagono regolare i tre angoli acuti determinati da lati e/o diagonali uscenti da uno stesso vertice tra loro consecutivi sono congruenti (insistono su corde e quindi archi congruenti nel cerchio circoscritto) e quindi misurano 36°, il che comporta che l'angolo tra lato e diagonale non immediatamente consecutiva uscenti da uno stesso vertice sia di 72° e di conseguenza (con riferimento alla figura a lato) che i 4 triangoli bianchi siano isosceli. Ora, tracciando la diagonale mancante nella figura originale, il quadrilatero *B* si può scomporre in tre triangoli di cui



- uno congruente al triangolo che nel quadrilatero *B* sta al di sopra della diagonale tratteggiata (entrambi isosceli con basi congruenti e angoli al vertice congruenti, dato che le cinque diagonali individuano un pentagono regolare all'interno di quello dato),
- un altro congruente al triangolo che nel quadrilatero *B* sta subito al di sotto della diagonale tratteggiata,
- un terzo congruente al triangolo *A* (entrambi isosceli con basi congruenti e angoli alla base congruenti).

Quindi *B* risulta scomposto in figure equivalenti a due triangoli *A*.

J5. (*18 punti*) Considera già dimostrato il fatto che l'equazione $x^5 + x = 10$ ammette un'unica soluzione (reale positiva). Dimostra che tale soluzione non è un numero razionale (cioè non può essere espressa come quoziente di due numeri interi).

Soluzione. È ovvio che la soluzione è strettamente compresa tra 1 e 2. Se un numero razionale p/q (con p e q interi coprimi positivi) fosse la soluzione, si dovrebbe avere

$$p^5 + pq^4 = 10q^5$$

e quindi p dovrebbe dividere 10, cioè essere 5 o 10, poiché nessuna frazione della forma $1/q$ o $2/q$ è maggiore di 1. In ordine crescente, le frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno 5 o 10 al numeratore e sono minori di 2, sono 10/9, 5/4, 10/7, 5/3 ed è facile verificare che $10^5 + 10\times7^4 < 10\times7^5$ e quindi 10/7 è minore della soluzione, mentre $5^5 + 5\times3^4 > 10\times3^5$ e quindi 5/3 è maggiore della soluzione.

J6. (*22 punti*) Immagina il piano come un foglio a quadretti (tutti dello stesso lato) illimitato in ogni direzione e chiama *nodo* ogni vertice di ogni quadrato. Dimostra che per ogni n esiste un cerchio contenente all'interno esattamente n nodi.

Soluzione. Si doti il piano di un sistema cartesiano ortogonale $0xy$ in cui i nodi siano esattamente i punti a coordinate intere e si consideri, ad esempio, il punto

$$P \equiv (\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Nessuna circonferenza centrata in P può contenere più di un nodo. Infatti se due nodi (a,b) e (c,d) avessero da P la stessa distanza, cioè se

$$(a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = (c - \sqrt{2})^2 + (d - \sqrt{3})^2,$$

esisterebbe una combinazione $h\sqrt{2} + k\sqrt{3}$ mediante due interi h e k di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ che è un intero N, ma ciò è impossibile in quanto, ad esempio, quadrando i due membri dell'uguaglianza $k\sqrt{3} = N - h\sqrt{2}$ si otterrebbe che $\sqrt{2}$ è razionale.

È ovvio che un cerchio centrato in P di raggio sufficientemente piccolo non contiene nodi.

Poiché esistono infiniti nodi, ma ogni regione limitata di piano contiene solo un numero finito di nodi, per quanto visto sopra, al crescere del raggio in modo opportuno, si potrà aggiungere esattamente un nodo alla volta.