# Kangourou della Matematica 2017
## Coppa Junior a squadre
## Finale
## Cervia, 7 maggio 2017

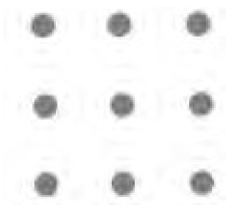
# Quesiti

### 1. Diviso 11
Trovate il più piccolo intero positivo dispari di tre cifre, divisibile per 11 e tale che la cifra delle centinaia sia maggiore di quella delle unità.

### 2. I nipoti di Nonna Anna
Anna ha quattro figli ed è la nonna di Mario, Silvia, Nadia e Pietro, ciascuno dei quali è cugino di ognuno degli altri tre. Se Mario, Silvia, Nadia e Pietro hanno rispettivamente 9, 5, 8 e 8 cugini che sono anche nipoti di Anna, quanti nipoti (figli dei figli) ha Nonna Anna?

### 3. Divisione intera
Qual è la somma di 100 e della somma dei numeri interi $z$ (con segno) tali che $z^2 + 12$ è divisibile per $z + 4$?

### 4. Sblocca il cellulare!
Paolo ha un vecchio cellulare a tastiera: a fianco vedi lo schema della tastiera. Paolo ha dimenticato lo schema con cui deve premerne i tasti per sbloccarlo: ricorda solo che i tasti erano i vertici di un parallelogramma e che andavano battuti in senso orario o antiorario. Qual è il massimo numero di tentativi che Paolo dovrà fare per sbloccare il cellulare? (Osservate che, per ogni parallelogramma che può essere individuato sulla tastiera, il codice cambia a seconda del punto di partenza.)

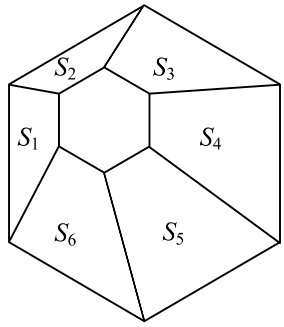


### 5. Tappi blu
In una scatola, oltre a dei tappi blu, ce ne sono 20 rossi e 30 bianchi. Si sa che la probabilità di pescare alla cieca un tappo blu è 9/11. Quanti sono i tappi blu nella scatola?

### 6. Nelle tasche
La mia giacca ha quattro tasche: ciascuna contiene un numero diverso di monete da 1 euro. La tasca $A$ ne contiene meno della $B$, la $B$ meno della $C$ e la $C$ meno della $D$. Inoltre il contenuto della $D$ è minore di quello della $A$ e della $B$ insieme e quello della $B$ e della $C$ insieme è minore di quello della $A$ e della $D$ insieme. Quanti euro ho come minimo nella giacca?

### 7. Progressioni aritmetiche
Consideriamo l'insieme dei primi 100 numeri interi positivi. Da tale insieme formiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da 7 numeri che, quando ordinati in ordine crescente, formino una progressione aritmetica (ad es. {1,2,3,4,5,6,7} oppure {5,8,11,14,17,20,23}). Quanti insiemi distinti di tale forma esistono?

## 8. Gli esagoni




La figura mostra due esagoni regolari contenuti uno nell'altro, che hanno i lati paralleli e i due bordi privi di punti in comune. Il più piccolo ha il lato di 1 cm, il più grande di 3 cm. Quanto vale il quadrato della somma delle aree dei trapezi $S_1$ e $S_4$ ?

## 9. Somma di cubi

Qual è la cifra delle unità del numero $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2016^3 + 2017^3$ ?

## 10. Stesso perimetro

Un triangolo equilatero è diviso in due parti, un triangolo $T$ e un trapezio $P$, da una retta parallela ad uno dei suoi lati. Se il triangolo e il trapezio così ottenuti hanno lo stesso perimetro, qual è il rapporto tra l'area di $T$ e quella di $P$?

*Per formulare la risposta pensate il rapporto come frazione ridotta ai minimi termini e il numeratore e il denominatore come numeri di 2 cifre, non importa se significative, e scriveteli di seguito; ad esempio per indicare la frazione* 1/2 *scrivete* 0102.

## 11. Per 123

Trovate il più piccolo numero intero positivo che moltiplicato per 123 dà un prodotto che termina con 2017.

## 12. Tre cubi

Ho incollato tre cubi di volume 1 cm$^3$, 8 cm$^3$ e 27 cm$^3$ lungo le loro facce, in modo che la superficie totale del solido risultante sia la più piccola possibile. Quanti centimetri quadrati misura tale superficie?

## 13. I gettoni

Voglio mettere dei gettoni sulle caselle di una griglia 8×2 (un solo gettone per casella) rispettando la condizione che non ci siano gettoni in due caselle che hanno in comune un lato o un vertice. Qual è il massimo numero di gettoni che posso inserire e in quanti modi diversi?

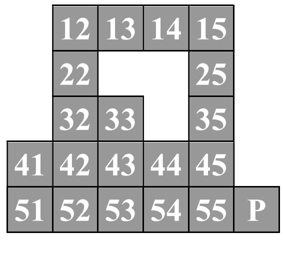
(*Scrivete prima il numero di gettoni e poi il numero di modi: ad esempio per indicare 1 gettone e 8 modi scrivete 0108.*)

## 14. Divisori proibiti

Quanti tra i primi 1000 numeri interi positivi non hanno tra i loro divisori né 3, né 5, né 7?

## 15. Passeggiate

Gianni parte dalla casella P e fa una passeggiata sulla tabella rappresentata a lato passando da una casella grigia a una a essa adiacente (cioè che ha un lato in comune con essa) in modo da visitare tutte le 20 caselle grigie una e una sola volta.
Quanto vale la somma dei numeri contenuti nelle possibili caselle di arrivo?



# Quesiti e svolgimenti

## 1. Diviso 11

Trovate il più piccolo intero positivo dispari di tre cifre, divisibile per 11 e tale che la cifra delle centinaia sia maggiore di quella delle unità.

**Risposta: 0231.**
**Soluzione.** Ovvia.

## 2. I nipoti di Nonna Anna

Anna ha quattro figli ed è la nonna di Mario, Silvia, Nadia e Pietro, ciascuno dei quali è cugino di ognuno degli altri tre. Se Mario, Silvia, Nadia e Pietro hanno rispettivamente 9, 5, 8 e 8 cugini che sono anche nipoti di Anna, quanti nipoti (figli dei figli) ha Nonna Anna?

**Risposta: 0010.**
**Soluzione.** I nipoti di nonna Anna sono i 9 cugini di Mario, Mario stesso e suoi eventuali fratelli (o sorelle). Nadia e Pietro hanno un fratello in più di Mario, Silvia 4 in più. Poiché i cugini di Mario sono $9 = 5 + 2 + 2$, Mario è figlio unico, dunque nonna Anna ha 10 nipoti.

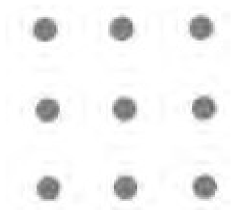
## 3. Divisione intera

Qual è la somma di 100 e della somma dei numeri interi $z$ (con segno) tali che $z^2 + 12$ è divisibile per $z + 4$?

**Risposta: 0052.**
**Soluzione.** $(z^2 + 12) = (z^2 - 16) + 28 = (z + 4)(z - 4) + 28$ è divisibile per $(z + 4)$ se e solo se lo è 28, cioè $(z + 4)$ è uno dei fattori interi di 28: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28$.
Ora $z + 4 = \pm k$ significa $z = \pm k - 4$; quindi la somma di tutti i numeri $z$ che sono soluzione del problema è $0 - 4 \times 12 = -48$, che sommato con 100 dà 52.

## 4. Sblocca il cellulare!

Paolo ha un vecchio cellulare a tastiera: a fianco vedi lo schema della tastiera. Paolo ha dimenticato lo schema con cui deve premerne i tasti per sbloccarlo: ricorda solo che i tasti erano i vertici di un parallelogramma e che andavano battuti in senso orario o antiorario. Qual è il massimo numero di tentativi che Paolo dovrà fare per sbloccare il cellulare? (Osservate che, per ogni parallelogramma che può essere individuato sulla tastiera, il codice cambia a seconda del punto di partenza.)



**Risposta: 0176.**
**Soluzione.** Bisogna trovare il numero di parallelogrammi che hanno vertici sulla tastiera e poi moltiplicare per 8. Posta 1 la distanza tra due tasti consecutivi, i parallelogrammi sono: 1 quadrato $2 \times 2$; 1 quadrato $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, 4 quadrati $1 \times 1$; 4 rettangoli $2 \times 1$; 12 parallelogrammi non rettangoli, di cui 8 di altezza 1 e 4 di altezza 2. Complessivamente 22 parallelogrammi.

## 5. Tappi blu

In una scatola, oltre a dei tappi blu, ce ne sono 20 rossi e 30 bianchi. Si sa che la probabilità di pescare alla cieca un tappo blu è 9/11. Quanti sono i tappi blu nella scatola?

**Risposta: 0225.**
**Soluzione.** Sia $x$ il numero dei tappi blu; allora $x/(x + 50) = 9/11$ cioè $2x = 450$.

## 6. Nelle tasche

La mia giacca ha quattro tasche: ciascuna contiene un numero diverso di monete da 1 euro. La tasca $A$ ne contiene meno della $B$, la $B$ meno della $C$ e la $C$ meno della $D$. Inoltre il contenuto della $D$ è minore di quello della $A$ e della $B$ insieme e quello della $B$ e della $C$ insieme è minore di quello della $A$ e della $D$ insieme. Quanti euro ho come minimo nella giacca?

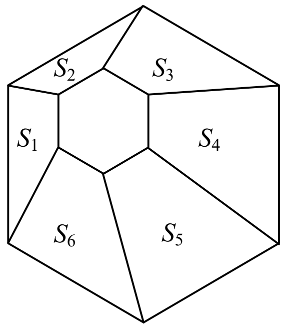
**Risposta: 0023.**
**Soluzione.** Chiamo con la lettera della tasca il numero di euro che contiene.
Per ipotesi $A < B < C < D$. Inoltre notiamo che $B + C < A + D$ equivale a $B - A < D - C$, cioè se $B - A = 1$, deve essere almeno $D - C = 2$.
Sommando membro a membro le due disuguaglianze $D < A + B$ e $B + C < A + D$ si ha $C < 2A$. Quindi $A$ non può essere minore di 3 (se fosse 1, $A$ coinciderebbe con $B$ e $C$, se fosse 2, $B$ coinciderebbe o con $A$ o con $C$) e quindi $C$ deve essere non minore di 5.
Ma se $A = 3$, $B = 4$, $C = 5$, $D = 7$ la disuguaglianza $D < A + B$ non è soddisfatta.
Serve quindi prendere $A > 3$: dunque $A = 4$, $B = 5$, $C = 6$, $D = 8$: $4 + 5 + 6 + 8 = 23$.

## 7. Progressioni aritmetiche

Consideriamo l'insieme dei primi 100 numeri interi positivi. Da tale insieme formiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da 7 numeri che, quando ordinati in ordine crescente, formino una progressione aritmetica (ad es. {1,2,3,4,5,6,7} oppure {5,8,11,14,17,20,23}). Quanti insiemi distinti di tale forma esistono?

**Risposta: 0784.**
**Soluzione.** Con una progressione di ragione 1 posso scegliere il primo elemento da 1 a 94; di ragione 2 posso sceglierlo tra 1 e 88; e così via fino a ragione 16 per cui posso scegliere il primo elemento tra 1 e 4. Le scelte possibili formano una progressione aritmetica di ragione 6, con primo termine 4 e ultimo 94, la cui somma è $4 \times 16 + 6\,(1 + 2 + \ldots + 15) = 784$.

## 8. Gli esagoni




La figura mostra due esagoni regolari contenuti uno nell'altro, che hanno i lati paralleli e i due bordi privi di punti in comune. Il più piccolo ha il lato di 1 cm, il più grande di 3 cm. Quanto vale il quadrato della somma delle aree dei trapezi $S_1$ e $S_4$?

**Risposta: 0048.**
**Soluzione.** I due trapezi hanno entrambi una base di 3 cm e una di 1 cm, e la somma delle loro altezze è $3\sqrt{3} - \sqrt{3}$ quindi la somma delle aree è $4\sqrt{3}$.

## 9. Somma di cubi

Qual è la cifra delle unità del numero $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2016^3 + 2017^3$?

**Risposta: 0009.**
**Soluzione.** La somma dei cubi dei primi 10 interi (3025) ha come cifra delle unità 5: la stessa cosa vale ovviamente per i successivi 10 interi e così via. Fermandosi a 2010, che è un multiplo dispari di 10, si avrebbe dunque ancora 5. La somma dei cubi degli interi da 1 a 7 (784) ha come cifra delle unità 4, quindi la cifra cercata è 9.

## 10. Stesso perimetro

Un triangolo equilatero è diviso in due parti, un triangolo $T$ e un trapezio $P$, da una retta parallela ad uno dei suoi lati. Se il triangolo e il trapezio così ottenuti hanno lo stesso perimetro, qual è il rapporto tra l'area di $T$ e quella di $P$? *Per formulare la risposta pensate il rapporto come frazione* *ridotta ai minimi termini e il numeratore e il denominatore come numeri di* 2 *cifre, non importa se significative, e scriveteli di seguito; ad esempio per indicare la frazione* 1/2 *scrivete* 0102.

**Risposta: 0907.**
**Soluzione.** Si può supporre che il triangolo di partenza abbia lato di lunghezza 1. Detta $x$ la lunghezza del lato del triangolo $T$, il perimetro di $T$ è $3x$, quello del trapezio $P$ è $3 - x$ e quindi $x = 3/4$. L'area di $T$ è $(\sqrt{3})\, x^2/4$, quella di P è $(\sqrt{3})(1 - x^2)/4$ e quindi il loro rapporto è 9/7.

## 11. Per 123

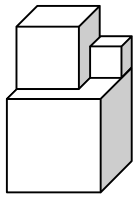
Trovate il più piccolo numero intero positivo che moltiplicato per 123 dà un prodotto che termina con 2017.

**Risposta: 0179.**
**Soluzione.** Il numero che cerchiamo chiaramente deve terminare con 9: è facile allora vedere che non può avere solo due cifre (basta considerare il secondo passaggio nella moltiplicazione). Proviamo allora con un numero di tre cifre.
Da $(10^2x + 10y + 9) \times 123 = 12300x + 1230y + 1107$ segue che $3y$ deve essere un numero che termina per 1, dunque $3y = 21$ per cui $y=7$. Basta ora assumere $x = 1$ perché il numero $12300x + 1230 \times 7 + 1107 = 12300x + 9717$ termini con 2017 (in effetti se $x = 1$ vale 22017).

## 12. Tre cubi

Ho incollato tre cubi di volume 1 $cm^3$, 8 $cm^3$ e 27 $cm^3$ lungo le loro facce, in modo che la superficie totale del solido risultante sia la più piccola possibile. Quanti centimetri quadrati misura tale superficie?

**Risposta: 0072.**
**Soluzione.** È chiaro che la faccia del cubo di lato 2 deve giacere completamente sul cubo di lato 3 e, delle facce del cubo di lato 1, una deve giacere completamente sul cubo di lato 2 e una su quello di lato 3, ad es. come in figura. Quindi la superficie totale è la somma di quella dei 3 cubi $[(1 + 4 + 9) \times 6 = 84]$ privata di 2 volte la superficie della faccia di lato 2 e di 4 volte quella della faccia di lato 1: $84 - 12 = 72$ $cm^2$.



## 13. I gettoni

Voglio mettere dei gettoni sulle caselle di una griglia 8 × 2 (un solo gettone per casella) rispettando la condizione che non ci siano gettoni in due caselle che hanno in comune un lato o un vertice. Qual è il massimo numero di gettoni che posso inserire e in quanti modi diversi? (*Scrivete prima il numero di gettoni e poi il numero di modi: ad esempio per indicare 1 gettone e 8 modi scrivete 0108.*)

**Risposta: 0480.**
**Soluzione.** È abbastanza chiaro che non ne posso inserire più di 4. Sotto sono indicati i due schemi tipo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | 1 | | 1 | |
| | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 | | | |
| | | 1 | | | | 1 | |

che possono essere alternati, slittati ecc. Denotiamo ogni cella col numero di riga e colonna della tabella. Partendo da (1,1), se tra gettoni successivi si interpone una sola colonna sono possibili $2^3$ disposizioni distinte (ogni volta si può decidere se restare sulla stessa riga o cambiarla) e altre $2^3$ se l'ultimo gettone viene posto sulla ottava colonna; altre $2 \times 2^2$ disposizioni sono possibili se il terzo gettone viene messo sulla sesta colonna ma i precedenti sono su colonne dispari e altre $2 \times 2^2$ disposizioni sono possibili se il secondo gettone viene messo sulla quarta colonna: in totale 32 disposizioni. Simmetricamente se ne hanno 32 partendo da (2,1). Infine partendo da (1,2) sono possibili $2^3$ disposizioni distinte e simmetricamente partendo da (2,2). In totale 80.

## 14. Divisori proibiti

Quanti, tra i primi 1000 numeri interi positivi non hanno tra i loro divisori né 3, né 5, né 7?

**Risposta: 0457.**
**Soluzione.** Siano $A$, $B$, $C$ gli insiemi dei numeri minori di 1000 rispettivamente divisibili per 3, 5 e 7. Allora a 1000 bisogna togliere

$$S = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

ove con $|X|$ abbiamo denotato il numero di elementi dell'insieme $X$. Il numero di elementi di ciascun insieme in questione è dato dal quoziente della divisione di 1000 rispettivamente per 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105 e quindi $S = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$ e $1000 - S = 457$.

## 15. Passeggiate

Gianni parte dalla casella P e fa una passeggiata sulla tabella rappresentata a lato passando da una casella grigia a una a essa adiacente (cioè che ha un lato in comune con essa) in modo da visitare tutte le 20 caselle grigie una e una sola volta.
Quanto vale la somma dei numeri contenuti nelle possibili caselle di arrivo?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| | 22 | | | 25 | |
| | 32 | 33 | | 35 | |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | P |

**Risposta: 0280.**
**Soluzione.** 22+(33+42+51)+(35+44+53)=280. I percorsi indicati sotto non sono i soli che arrivano nelle caselle evidenziate, ma servono a confermare che quelle caselle sono raggiungibili.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 8 | 7 | 6 | |
| | 10 | | | 5 | |
| | 11 | 12 | | 4 | |
| 19 | 18 | 13 | 14 | 3 | |
| 20 | 17 | 16 | 15 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 8 | 7 | 6 | |
| | 10 | | | 5 | |
| | 11 | 12 | | 4 | |
| 19 | 20 | 13 | 14 | 3 | |
| 18 | 17 | 16 | 15 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 8 | 7 | 6 | |
| | 10 | | | 5 | |
| | 11 | 12 | | 4 | |
| 15 | 14 | 13 | 20 | 3 | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 8 | 7 | 6 | |
| | 10 | | | 5 | |
| | 11 | 20 | | 4 | |
| 13 | 12 | 19 | 18 | 3 | |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 10 | 9 | 8 | |
| | 12 | | | 7 | |
| | 13 | 14 | | 6 | |
| 17 | 16 | 15 | 4 | 5 | |
| 18 | 19 | 20 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 19 | 18 | 17 | 16 | |
| | 20 | | | 15 | |
| | 9 | 10 | | 14 | |
| 7 | 8 | 11 | 12 | 13 | |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 16 | 17 | 18 | |
| | 14 | | | 19 | |
| | 13 | 12 | | 20 | |
| 9 | 10 | 11 | 4 | 3 | |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| | **22** | | | 25 | |
| | 32 | **33** | | **35** | |
| 41 | **42** | 43 | **44** | 45 | |
| **51** | 52 | **53** | 54 | 55 | P |

Perché altre no? Innanzi tutto è chiaro che essendo 20 le caselle, l'arrivo si deve trovare su una casella che – se colorassimo la tabella come una scacchiera – abbia colore opposto a quello della casella P. Le caselle trovate sono di questo tipo; altre caselle di questo tipo sono:

- 13 che non può essere casella di arrivo poiché se il penultimo passo fosse nella casella 14 significherebbe che in precedenza si è già esplorata la 12, dalla quale però (se si arriva dalla 22) non c'è modo di uscire senza attraversare la 13 o ripassare dalla 22; analogo problema si presenta nella 14 se il penultimo passo fosse nella 12;
- 15 che non può essere casella di arrivo per problemi simili ai precedenti sulle caselle 14 e 25;
- 55 che è forzatamente in ogni percorso la prima casella di transito e quindi non può essere di arrivo.