



Kangourou della Matematica 2017
Coppa Kangourou a squadre
Finale
Cervia, 7 maggio 2017



Quesiti

1. Speciale

Chiamiamo numero *speciale* un numero intero (positivo) di quattro cifre (significative) tale che il prodotto delle prime due cifre sia uguale alla somma delle ultime due. Ad esempio 2351 è un numero speciale ($2 \times 3 = 5 + 1$); un altro numero speciale è 5387. Qual è il più piccolo numero speciale?

2. I nipoti di Nonna Anna

Anna ha quattro figli ed è la nonna di Mario, Silvia, Nadia e Pietro, ciascuno dei quali è cugino di ognuno degli altri tre. Se Mario, Silvia, Nadia e Pietro hanno rispettivamente 9, 5, 8 e 8 cugini che sono anche nipoti di Anna, quanti nipoti (figli dei figli) ha Nonna Anna?

3. Il doppio

Denotiamo con a, b, c, d quattro cifre diverse. Se il numero di quattro cifre $dcb a$ è il doppio del numero di tre cifre abb quanto vale $dcb a$?

4. Divisione intera

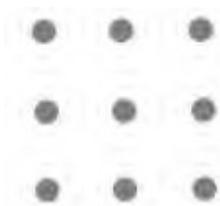
Qual è la somma dei numeri interi positivi n tali che $n^2 + 12$ è divisibile per $n + 4$?

5. Tappi blu

In una scatola, oltre a dei tappi blu, ce ne sono 20 rossi e 30 bianchi. Si sa che la probabilità di pescare alla cieca un tappo blu è $9/11$. Quanti sono i tappi blu nella scatola?

6. Sblocca il cellulare!

Paolo ha un vecchio cellulare a tastiera: a fianco vedi lo schema della tastiera. Paolo ha dimenticato lo schema con cui deve premerne i tasti per sbloccarlo: ricorda solo che i tasti erano i vertici di un parallelogramma e che andavano battuti in senso orario o antiorario. Qual è il massimo numero di tentativi che Paolo dovrà fare per sbloccare il cellulare? (Osservate che, per ogni parallelogramma che può essere individuato sulla tastiera, il codice cambia a seconda del punto di partenza.)



7. Tre cubi

Ho incollato tre cubi di volume 1 cm^3 , 8 cm^3 e 27 cm^3 lungo le loro facce, in modo che la superficie totale del solido risultante sia la più piccola possibile. Quanti centimetri quadrati misura tale superficie?

8. Nelle tasche

La mia giacca ha quattro tasche: ciascuna contiene un numero diverso di monete da 1 euro. La tasca A ne contiene meno della B , la B meno della C e la C meno della D . Inoltre il contenuto della D è minore di quello della A e della B insieme e quello della B e della C insieme è minore di quello della A e della D insieme. Quanti euro ho come minimo nella giacca?

9. Progressioni aritmetiche

Consideriamo l'insieme dei primi 100 numeri interi positivi. Da tale insieme formiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da 7 numeri che, quando ordinati in ordine crescente, formino una progressione aritmetica (ad es. $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ oppure $\{5,8,11,14,17,20,23\}$). Quanti insiemi distinti di tale forma esistono?

10. Biglie

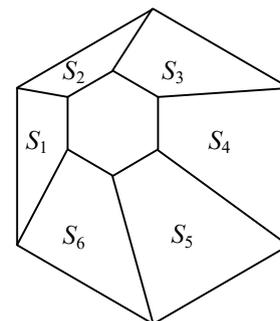
Ho 5 scatole, ognuna contenente biglie di un solo colore, rosso o blu. Nella prima scatola ci sono 112 biglie, nella seconda 105, nella terza 100, nella quarta 115 e nella quinta 128. Dopo che Martino ha portato via una scatola, nelle 4 scatole rimanenti il numero delle biglie blu è il triplo del numero di biglie rosse. Quante biglie c'erano nella scatola portata via da Martino?

11. Somma di cubi

Qual è la cifra delle unità del numero $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2016^3 + 2017^3$?

12. Gli esagoni

La figura mostra due esagoni regolari contenuti uno nell'altro, che hanno i lati paralleli e i due bordi privi di punti in comune. Il più piccolo ha il lato di 1 cm, il più grande di 3 cm. Quanto vale il quadrato della somma delle aree dei trapezi S_1 e S_4 ?



13. Il resto

Trovate il resto nella divisione per 9 di

122.333.444.455.555.666.666.777.777.788.888.888.999.999.999.

14. Stesso perimetro

Un triangolo equilatero è diviso in due parti, un triangolo T e un trapezio P , da una retta parallela ad uno dei suoi lati. Se il triangolo e il trapezio così ottenuti hanno lo stesso perimetro, qual è il rapporto tra l'area di T e quella di P ?

Per formulare la risposta pensate il rapporto come frazione ridotta ai minimi termini e il numeratore e il denominatore come numeri di 2 cifre, non importa se significative, e scrivetele di seguito; ad esempio per indicare la frazione $1/2$ scrivete 0102.

15. Per 123

Trovate il più piccolo numero intero positivo che moltiplicato per 123 dà un prodotto che termina con 2017.



Kangourou della Matematica 2017
Coppa Kangourou a squadre
Finale
Cervia, 7 maggio 2017

Quesiti e svolgimento

1. Speciale

Chiamiamo numero *speciale* un numero intero (positivo) di quattro cifre (significative) tale che il prodotto delle prime due cifre sia uguale alla somma delle ultime due. Ad esempio 2351 è un numero speciale ($2 \times 3 = 5 + 1$); un altro numero speciale è 5387. Qual è il più piccolo numero speciale?

Risposta: 1000.

Soluzione. Ovvvia.

2. I nipoti di Nonna Anna

Anna ha quattro figli ed è la nonna di Mario, Silvia, Nadia e Pietro, ciascuno dei quali è cugino di ognuno degli altri tre. Se Mario, Silvia, Nadia e Pietro hanno rispettivamente 9, 5, 8 e 8 cugini che sono anche nipoti di Anna, quanti nipoti (figli dei figli) ha Nonna Anna?

Risposta: 0010.

Soluzione. I nipoti di nonna Anna sono i 9 cugini di Mario, Mario stesso e suoi eventuali fratelli (o sorelle). Nadia e Pietro hanno un fratello in più di Mario, Silvia 4 in più. Poiché i cugini di Mario sono $9 = 5 + 2 + 2$, Mario è figlio unico, dunque nonna Anna ha 10 nipoti.

3. Il doppio

Denotiamo con a, b, c, d quattro cifre diverse. Se il numero di quattro cifre $dcba$ è il doppio del numero di tre cifre abb quanto vale $dcba$?

Risposta: 1798.

Soluzione. Se $abb + abb = dcba$, deve essere $d = 1$ e a pari (somma di 2 volte b) e > 5 . Quindi le scelte possibili sono quelle rappresentate in tabella

a	b	abb	$2abb$	$dcba$	
8	9	899	1798	1798	ok
	4	844	1688	1c48	no
6	8	688	1376	1c86	no
	3	633	1266	1c36	no

4. Divisione intera

Qual è la somma dei numeri interi positivi n tali che $n^2 + 12$ è divisibile per $n + 4$?

Risposta: 0037.

Soluzione. $(n^2 + 12) = (n^2 - 16) + 28 = (n + 4)(n - 4) + 28$ è divisibile per $(n + 4)$ se e solo se lo è 28, cioè $(n + 4)$ è uno dei fattori interi di 28: 1, 2, 4, 7, 14, 28; ma, dato che $n + 4 = k$ significa $n = k - 4$ e n deve essere positivo, la scelta si riduce a 7, 14, 28.

Quindi la somma di tutti i numeri n che sono soluzione del problema è $49 - 4 \times 3 = 37$.

5. Tappi blu

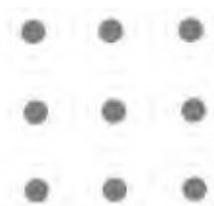
In una scatola, oltre a dei tappi blu, ce ne sono 20 rossi e 30 bianchi. Si sa che la probabilità di pescare alla cieca un tappo blu è $9/11$. Quanti sono i tappi blu nella scatola?

Risposta: 0225.

Soluzione. Sia x il numero dei tappi blu; allora $x/(x + 50) = 9/11$ cioè $2x = 450$.

6. Sblocca il cellulare!

Paolo ha un vecchio cellulare a tastiera: a fianco vedi lo schema della tastiera. Paolo ha dimenticato lo schema con cui deve premerne i tasti per sbloccarlo: ricorda solo che i tasti erano i vertici di un parallelogramma e che andavano battuti in senso orario o antiorario. Qual è il massimo numero di tentativi che Paolo dovrà fare per sbloccare il cellulare? (Osservate che, per ogni parallelogramma che può essere individuato sulla tastiera, il codice cambia a seconda del punto di partenza.)



Risposta: 0176.

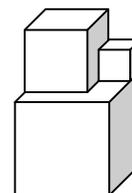
Soluzione. Bisogna trovare il numero di parallelogrammi che hanno vertici sulla tastiera e poi moltiplicare per 8. Posta 1 la distanza tra due tasti consecutivi, i parallelogrammi sono: 1 quadrato 2×2 ; 1 quadrato $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, 4 quadrati 1×1 ; 4 rettangoli 2×1 ; 12 parallelogrammi non rettangoli, di cui 8 di altezza 1 e 4 di altezza 2. Complessivamente 22 parallelogrammi.

7. Tre cubi

Ho incollato tre cubi di volume 1 cm^3 , 8 cm^3 e 27 cm^3 lungo le loro facce, in modo che la superficie totale del solido risultante sia la più piccola possibile. Quanti centimetri quadrati misura tale superficie?

Risposta: 0072.

Soluzione. È chiaro che la faccia del cubo di lato 2 deve giacere completamente sul cubo di lato 3 e, delle facce del cubo di lato 1, una deve giacere completamente sul cubo di lato 2 e una su quello di lato 3, ad es. come in figura. Quindi la superficie totale è la somma di quella dei 3 cubi $[(1 + 4 + 9) \times 6 = 84]$ privata di 2 volte la superficie della faccia di lato 2 e di 4 volte quella della faccia di lato 1: $84 - 12 = 72 \text{ cm}^2$.



8. Nelle tasche

La mia giacca ha quattro tasche: ciascuna contiene un numero diverso di monete da 1 euro. La tasca A ne contiene meno della B , la B meno della C e la C meno della D . Inoltre il contenuto della D è minore di quello della A e della B insieme e quello della B e della C insieme è minore di quello della A e della D insieme. Quanti euro ho come minimo nella giacca?

Risposta: 0023.

Soluzione. Chiamo con la lettera della tasca il numero di euro che contiene.

Per ipotesi $A < B < C < D$. Inoltre notiamo che $B + C < A + D$ equivale a $B - A < D - C$, cioè se $B - A = 1$, deve essere almeno $D - C = 2$.

Sommando membro a membro le due disuguaglianze $D < A + B$ e $B + C < A + D$ si ha $C < 2A$. Quindi A non può essere minore di 3 (se fosse 1, A coinciderebbe con B e C , se fosse 2, B coinciderebbe o con A o con C) e quindi C deve essere non minore di 5.

Ma se $A = 3$, $B = 4$, $C = 5$, $D = 7$ la disuguaglianza $D < A + B$ non è soddisfatta.

Serve quindi prendere $A > 3$: dunque $A = 4$, $B = 5$, $C = 6$, $D = 8$: $4 + 5 + 6 + 8 = 23$.

9. Progressioni aritmetiche

Consideriamo l'insieme dei primi 100 numeri interi positivi. Da tale insieme formiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da 7 numeri che, quando ordinati in ordine crescente, formino una progressione aritmetica (ad es. $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ oppure $\{5,8,11,14,17,20,23\}$). Quanti insiemi distinti di tale forma esistono?

Risposta: 0784.

Soluzione. Con una progressione di ragione 1 posso scegliere il primo elemento da 1 a 94; di ragione 2 posso sceglierlo tra 1 e 88; e così via fino a ragione 16 per cui posso scegliere il primo elemento tra 1 e 4. Le scelte possibili formano una progressione aritmetica di ragione 6, con primo termine 4 e ultimo 94, la cui somma è $4 \times 16 + 6(1 + 2 + \dots + 15) = 784$.

10. Biglie

Ho 5 scatole, ognuna contenente biglie di un solo colore, rosso o blu. Nella prima scatola ci sono 112 biglie, nella seconda 105, nella terza 100, nella quarta 115 e nella quinta 128. Dopo che Martino ha portato via una scatola, nelle 4 scatole rimanenti il numero delle biglie blu è il triplo del numero di biglie rosse. Quante biglie c'erano nella scatola portata via da Martino?

Risposta: 0100.

Soluzione. Il numero di biglie rimasto deve esser divisibile per 4 e deve essere uguale al numero di biglie contenuto in una scatola (la scatola delle rosse). Se Martino porta via la scatola da 100, un quarto del numero di biglie restanti (460) è 115, che è il contenuto di una delle scatole restanti; ciò non succede se porta via la scatola da 112 (poiché $448/4 = 112$, proprio il numero delle biglie della scatola portata via), né se porta via la scatola da 128 (poiché $432/4 = 108$ e nessuna scatola contiene tale numero di biglie). Negli altri due casi il numero di biglie residue non è divisibile per 4.

11. Somma di cubi

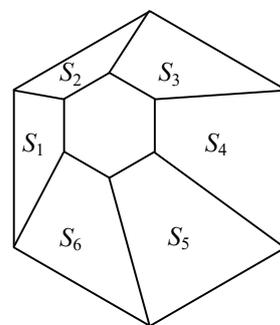
Qual è la cifra delle unità del numero $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2016^3 + 2017^3$?

Risposta: 0009.

Soluzione. La somma dei cubi dei primi 10 interi (3025) ha come cifra delle unità 5: la stessa cosa vale ovviamente per i successivi 10 interi e così via. Fermandosi a 2010, che è un multiplo dispari di 10, si avrebbe dunque ancora 5. La somma dei cubi degli interi da 1 a 7 (784) ha come cifra delle unità 4, quindi la cifra cercata è 9.

12. Gli esagoni

La figura mostra due esagoni regolari contenuti uno nell'altro, che hanno i lati paralleli e i due bordi privi di punti in comune. Il più piccolo ha il lato di 1 cm, il più grande di 3 cm. Quanto vale il quadrato della somma delle aree dei trapezi S_1 e S_4 ?



Risposta: 0048.

Soluzione. I due trapezi hanno entrambi una base di 3 cm e una di 1 cm, e la somma delle loro altezze è $3\sqrt{3} - \sqrt{3}$, quindi la somma delle aree è $4\sqrt{3}$.

13. Il resto

Trovate il resto nella divisione per 9 di

122.333.444.455.555.666.666.777.777.788.888.888.999.999.999.

Risposta: 0006.

Soluzione. Il resto nella divisione per 9 è il resto nella divisione per 9 della somma delle cifre: eliminando le cifre la cui somma è palesemente divisibile per 9 si ha

$$1 + 2 \times 2 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 7 \times 7 + 8 \times 8 = 1 + 9 \times 5 + 45 + 4 + 63 + 1 = 6 + 9 \times 17: \text{resto } 6.$$

14. Stesso perimetro

Un triangolo equilatero è diviso in due parti, un triangolo T e un trapezio P , da una retta parallela ad uno dei suoi lati. Se il triangolo e il trapezio così ottenuti hanno lo stesso perimetro, qual è il rapporto tra l'area di T e quella di P ?

Per formulare la risposta pensate il rapporto come frazione ridotta ai minimi termini e il

numeratore e il denominatore come numeri di 2 cifre, non importa se significative, e scriveteli di seguito; ad esempio per indicare la frazione $1/2$ scrivete 0102.

Risposta: 0907.

Soluzione. Si può supporre che il triangolo di partenza abbia lato di lunghezza 1. Detta x la lunghezza del lato del triangolo T , il perimetro di T è $3x$, quello del trapezio P è $3 - x$ e quindi $x = 3/4$. L'area di T è $(\sqrt{3})x^2/4$, quella di P è $(\sqrt{3})(1-x^2)/4$ e quindi il loro rapporto è $9/7$.

15. Per 123

Trovate il più piccolo numero intero positivo che moltiplicato per 123 dà un prodotto che termina con 2017.

Risposta: 0179.

Soluzione. Il numero che cerchiamo chiaramente deve terminare con 9: è facile allora vedere che non può avere solo due cifre (basta considerare il secondo passaggio nella moltiplicazione). Proviamo allora con un numero di tre cifre.

Da $(10^2x + 10y + 9) \times 123 = 12300x + 1230y + 1107$ segue che $3y$ deve essere un numero che termina per 1, dunque $3y = 21$ per cui $y = 7$. Basta ora assumere $x = 1$ perché il numero $12300x + 1230 \times 7 + 1107 = 12300x + 9717$ termini con 2017 (in effetti se $x = 1$ vale 22017).