Kangourou della Matematica 2017
Coppa Kangourou a squadre
Semifinale turno A
Cervia, 6 maggio 2017

Quesiti

1. Addendi

Il numero 5^6 può essere ottenuto sia come prodotto di 6 fattori ognuno uguale a 5 sia come somma di N addendi ognuno uguale a 5. Quanto vale N?

2. Shopping

Quando è uscita di casa, Luisa aveva in borsetta solo monete da un euro. È entrata in tre negozi e in ciascuno ha speso la metà di quanto aveva in borsetta al momento in cui è entrata più 50 centesimi. Ha sempre pagato l'esatto importo richiesto senza ricevere resto e, dopo i tre acquisti, le sono rimasti 23 euro. Con quante monete Luisa è uscita di casa?

3. Cubetti blu

Una scatola senza coperchio ha base di dimensioni 5 e 6 e altezza 7. Nella scatola sono stati riposti 210 cubetti di lato 1. Quelli che toccano la scatola sono rossi, gli altri sono blu. Quanti sono i cubetti blu che condividono almeno una faccia con un cubetto rosso?

4. Sommando le cifre

Un intero positivo n ha 90 cifre tutte diverse da zero; ciascuna cifra da 1 a 9 è presente in n lo stesso numero di volte. A partire da n costruiamo altri due numeri: a ottenuto premettendo 1 alla sequenza di cifre che dà n e b ottenuto scrivendo 1 dopo la sequenza di cifre che dà n. La differenza $b - a$ è divisibile per 9: qual è la somma delle cifre del quoziente $(b - a) : 9$?

5. Conosci solo un cateto

In un triangolo rettangolo le misure dei lati, espresse in centimetri, sono tutte numeri interi. Uno dei cateti misura 11 cm. Quanti centimetri misura il perimetro?

6. Le RETI

Pietro sostituisce ogni lettera dell'espressione

$$AMO + AMO + AMO = RETI$$

con una cifra, sostituendo lettere diverse con cifre diverse, in modo da ottenere un'uguaglianza corretta. Anche Andrea fa la stessa cosa, ma Pietro ottiene il più grande valore possibile per *RETI* e Andrea il più piccolo compatibile con il fatto che il numero abbia quattro cifre significative. Qual è la somma dei valori ottenuti per *RETI* da Andrea e Pietro?

7. La somma

In una sequenza di sei numeri, il primo è 4 e l'ultimo è 47. Ogni numero a partire dal terzo è la somma dei due precedenti. Qual è la somma di tutti i sei numeri?

8. La bici

Tra i pensionati di una città il 35% ha una bici. I pensionati che non hanno una bici costituiscono il 13% della popolazione totale della città. Quale è la percentuale di pensionati in quella città?

9. Numeri crescenti

Diciamo che un numero di tre cifre significative è "crescente" se le cifre sono tutte diverse e quella delle centinaia è minore di quella delle decine che è minore di quella delle unità. Quanti sono i numeri crescenti?

10. Quante coppie?

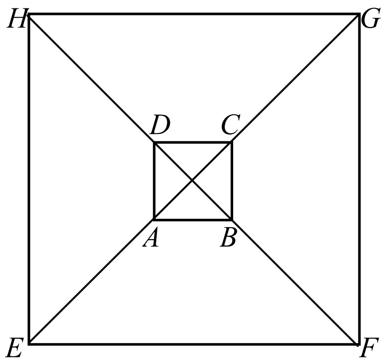
Per quante coppie (non ordinate) di numeri interi, diversi tra loro, compresi fra 1 e 103, entrambi inclusi, accade che la somma dei due numeri che costituiscono la coppia sia un numero pari?

11. Libri

Quattro scuole hanno ricevuto in dono in tutto 144 libri. In valore assoluto, la differenza tra

- il numero di libri ricevuti dalla scuola *A* e quelli ricevuti dalla scuola *B* è 4
- il numero di libri ricevuti dalla scuola *B* e quelli ricevuti dalla scuola *C* è 3
- il numero di libri ricevuti dalla scuola *C* e quelli ricevuti dalla scuola *D* è 2

La scuola *A* ha ricevuto il maggior numero di libri, ma meno di 40. Quanti libri hanno ricevuto rispettivamente la scuola *B* e la scuola *D*? (*Scrivete più a sinistra il numero di libri ricevuti da B*).



12. I due quadrati

Osservate la figura. L'area del quadrato *ABCD* è 23 cm^2, mentre l'area del quadrato *EFGH* è 777 cm^2. Quanti centimetri dista il punto *A* dal punto *F*?

13. Il prodotto

Nel prodotto

$$\_\,\_\,\_ \times 9\,\_ = \_\,3\,\_\,\_$$

il primo fattore *N* è un numero di 3 cifre, mentre il secondo fattore è un numero di due cifre con 9 come numero delle decine. Il risultato è un numero di 4 cifre che ha 3 come cifra delle centinaia. Quanti numeri *N* possono essere il primo fattore?

14. Il menu

Il ristorante di un albergo, aperto solo di sera, offre una scelta di alcuni primi piatti e di alcuni secondi piatti, questi ultimi in quantità maggiore dei primi. Lo scorso aprile una coppia di turisti ha cenato in albergo ogni sera e ha sempre voluto ordinare una diversa accoppiata primo - secondo piatto. In questo modo tutte le possibili accoppiate sono state ordinate, qualcuna anche più di una volta ma, durante la prima settimana, nessuno dei due ha ordinato due volte lo stesso piatto. Quante sono le possibili accoppiate di primi e secondi che si possono ottenere con i piatti presenti nel menù?

15. La coppia soluzione

Determinate la coppia ordinata (x,y) di interi positivi con $x < y$ che soddisfa l'equazione

$$x^2 + y^2 - 16y = 2017.$$

Nella risposta indicate nell'ordine il valore di x e quello di y.

Quesiti e svolgimenti

1. Addendi

Il numero 5^6 può essere ottenuto sia come prodotto di 6 fattori ognuno uguale a 5 sia come somma di N addendi ognuno uguale a 5. Quanto vale N?

Risposta: 3125.
Soluzione. $5^6 = 5 \times 5^5 = 5 \times N$.

2. Shopping

Quando è uscita di casa, Luisa aveva in borsetta solo monete da un euro. È entrata in tre negozi e in ciascuno ha speso la metà di quanto aveva in borsetta al momento in cui è entrata più 50 centesimi. Ha sempre pagato l'esatto importo richiesto senza ricevere resto e, dopo i tre acquisti, le sono rimasti 23 euro. Con quante monete Luisa è uscita di casa?

Risposta: 0191.
Soluzione. Subito prima di fare una spesa, Luisa ha in tasca il doppio di quanto le rimane dopo la spesa più un euro.

3. Cubetti blu

Una scatola senza coperchio ha base di dimensioni 5 e 6 e altezza 7. Nella scatola sono stati riposti 210 cubetti di lato 1. Quelli che toccano la scatola sono rossi, gli altri sono blu. Quanti sono i cubetti blu che condividono almeno una faccia con un cubetto rosso?

Risposta: 0062.
Soluzione. La scatola delimitata dai cubetti rossi ha dimensioni $3\times4\times6$.
A contatto ci sono $(3\times4) =12$ cubetti blu di base e $(2+3)\times5\times2=50$ delle pareti: in totale 62.

4. Sommando le cifre

Un intero positivo n ha 90 cifre tutte diverse da zero; ciascuna cifra da 1 a 9 è presente in n lo stesso numero di volte. A partire da n costruiamo altri due numeri: a ottenuto premettendo 1 alla sequenza di cifre che dà n e b ottenuto scrivendo 1 dopo la sequenza di cifre che dà n. La differenza $b - a$ è divisibile per 9: qual è la somma delle cifre del quoziente $(b - a) : 9$?

Risposta: 0360.
Soluzione. $a = 10^{90} + n$; $b = 10n + 1$ da cui $b - a = 9n - (10^{90} - 1) = 9(n - 10^{89} - 10^{88} - \ldots - 1)$ e $(b - a) : 9 = (n - 10^{89} - 10^{88} - \ldots - 1)$. Dunque a n tolgo un numero di 90 cifre tutte = 1, cioè ho un numero in cui compaiono 10 volte tutte le cifre da 1 a 8, quindi la somma è 360.

5. Conosci solo un cateto

In un triangolo rettangolo le misure dei lati, espresse in centimetri, sono tutte numeri interi. Uno dei cateti misura 11 cm. Quanti centimetri misura il perimetro?

Risposta: 0132.
Soluzione. Dette a, b e c le misure rispettivamente dei due cateti e dell'ipotenusa, si ha $121 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$; ne segue $c + a = 121$ e $c - a = 1$, quindi $c + a + b = 132$.

6. Le RETI

Pietro sostituisce ogni lettera dell'espressione

$$AMO + AMO + AMO = RETI$$

con una cifra, sostituendo lettere diverse con cifre diverse, in modo da ottenere un'uguaglianza corretta. Anche Andrea fa la stessa cosa, ma Pietro ottiene il più grande valore possibile per *RETI* e Andrea il più piccolo compatibile con il fatto che il numero abbia quattro cifre significative. Qual è la somma dei valori ottenuti per *RETI* da Andrea e Pietro?

Risposta: 3816.
Soluzione. Con un po' di prove si arriva a trovare per Andrea $AMO = 354$, da cui $RETI = 1062$, mentre per Pietro si trova $AMO = 918$, da cui $RETI = 2754$.

7. La somma

In una sequenza di sei numeri, il primo è 4 e l'ultimo è 47. Ogni numero a partire dal terzo è la somma dei due precedenti. Qual è la somma di tutti i sei numeri?

Risposta: 0116.
Soluzione. Detto x il secondo numero, otteniamo $47 = 5x + 12$ quindi $x = 7$ e i numeri sono 4, 7, 11, 18, 29, 47 con somma 116.

8. La bici

Tra i pensionati di una città il 35% ha una bici. I pensionati che non hanno una bici costituiscono il 13% della popolazione totale della città. Quale è la percentuale di pensionati in quella città?

Risposta: 0020.
Soluzione. Il 65% dei pensionati è il 13% della popolazione: quindi i pensionati sono 1/5 della popolazione.

9. Numeri crescenti

Diciamo che un numero di tre cifre significative è "crescente" se le cifre sono tutte diverse e quella delle centinaia è minore di quella delle decine che è minore di quella delle unità. Quanti sono i numeri crescenti?

Risposta: 0084.
Soluzione. Ovviamente la cifra delle centinaia deve essere maggiore di 0 e minore di 8.
Per i numeri con cifra delle centinaia 1 ci sono $7 \times 8/2 = 28$ scelte (tante quante le somme degli interi da 1 a 7); per quelli con cifra delle centinaia 2 ci sono $6 \times 7/2 = 21$ scelte; e così via fino all'unica scelta possibile per il caso in cui la cifra delle centinaia sia 7.
In totale: $1 + 3 + 6 +10 +15 + 21 + 28 = 84$.

10. Quante coppie?

Per quante coppie (non ordinate) di numeri interi, diversi tra loro, compresi fra 1 e 103, entrambi inclusi, accade che la somma dei due numeri che costituiscono la coppia sia un numero pari?

Risposta: 2601.
Soluzione. Bisogna conteggiare le coppie non ordinate di numeri pari e quelle di numeri dispari comprese tra 1 e 103. Dato che i numeri pari sono 51, le coppie ordinate di pari sono $51 \times 50/2$; dato che i numeri dispari sono 52, le coppie ordinate di dispari sono $51 \times 52/2$. La loro somma è $51^2 = 2601$.

11. Libri

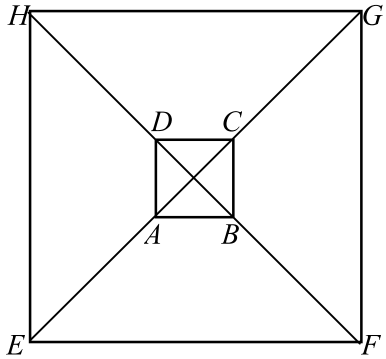
Quattro scuole hanno ricevuto in dono in tutto 144 libri. In valore assoluto, la differenza tra

- il numero di libri ricevuti dalla scuola A e quelli ricevuti dalla scuola B è 4
- il numero di libri ricevuti dalla scuola B e quelli ricevuti dalla scuola C è 3
- il numero di libri ricevuti dalla scuola C e quelli ricevuti dalla scuola D è 2

La scuola A ha ricevuto il maggior numero di libri, ma meno di 40. Quanti libri hanno ricevuto rispettivamente la scuola B e la scuola D? (*Scrivete più a sinistra il numero di libri ricevuti da B*).

Risposta: 3435.
Soluzione. Per ipotesi $A - B > 0$, dunque $A - B = 4$. Inoltre $4A$ è la somma di 144 e degli incrementi con segno opportuno.
Se entrambe le differenze $B - C$ e $C - D$ fossero negative, si avrebbe $D = C + 2 = B + 5 > A$; se entrambe fossero positive, a 144 si dovrebbe sommare $4 + 7 + 9 = 20$ e si avrebbe $A = 41$, se fosse positiva $B - C$ e negativa $C - D$ si dovrebbe sommare $4 + 7 + 5 = 16$ e si avrebbe $A = 40$: le tre possibilità sono da scartare. Allora è negativa $B - C$ e positiva $C - D$: a 144 si deve sommare $4 + 1 + 3 = 8$, quindi A=38, $B = 34$, $C = 37$, $D = 35$.

12. I due quadrati



Osservate la figura. L'area del quadrato $ABCD$ è 23 cm^2, mentre l'area del quadrato $EFGH$ è 777 cm^2. Quanti centimetri dista il punto A dal punto F?

Risposta: 0020.
Soluzione. In generale se le aree sono a^2 e b^2, la distanza AF è la radice quadrata di $(b - a)^2/4 + (b + a)^2/4 = (a^2 + b^2)/2$.
Ora $777 + 23 = 800$ e quindi AF=20.

13. Il prodotto

Nel prodotto

$$\_\,\_\,\_ \times 9\,\_ = \_\,3\,\_\,\_$$

il primo fattore N è un numero di 3 cifre, mentre il secondo fattore è un numero di due cifre con 9 come numero delle decine. Il risultato è un numero di 4 cifre che ha 3 come cifra delle centinaia. Quanti numeri N possono essere il primo fattore?

Risposta: 0005.
Soluzione. La cifra delle centinaia non può essere >1.
Evidentemente 100×93 soddisfa la condizione; anche $101 \times 93 = 9393$ e $102 \times 92 = 9384$ soddisfano la condizione; ancora, $103 \times 91 = 9373$ e $104 \times 90 = 9360$. Non ci sono altre soluzioni.

14. Il menu

Il ristorante di un albergo, aperto solo di sera, offre una scelta di alcuni primi piatti e di alcuni secondi piatti, questi ultimi in quantità maggiore dei primi. Lo scorso aprile una coppia di turisti ha cenato in albergo ogni sera e ha sempre voluto ordinare una diversa accoppiata primo - secondo piatto. In questo modo tutte le possibili accoppiate sono state ordinate, qualcuna anche più di una volta, ma durante la prima settimana nessuno dei due ha ordinato due volte lo stesso piatto. Quante sono le possibili accoppiate di primi e secondi che si possono ottenere con i piatti presenti nel menù?

Risposta: 0056.
Soluzione. Se durante la prima settimana nessuno dei due ha ordinato due volte lo stesso piatto devono esserci almeno 7 primi diversi, dunque almeno 8 secondi diversi. Quindi il numero di accoppiate primo - secondo sono almeno $7 \times 8 = 56$; se il numero dei primi o dei secondi fosse superiore, le accoppiate sarebbero più di 60 e in 30 giorni i due turisti non sarebbero riusciti a ordinarle tutte.

15. La coppia soluzione

Determinate la coppia ordinata (x,y) di interi positivi con $x < y$ che soddisfa l'equazione

$$x^2 + y^2 - 16y = 2017.$$

Nella risposta indicate nell'ordine il valore di x e quello di y.

Risposta: 2049.

Soluzione. Viene detto nel testo che la soluzione esiste ed è unica, quindi basta trovarne una. Si tratta di risolvere $x^2 + (y - 8)^2 = 2017 + 64$.

Ora 2081 è somma di $400 = 20^2$ e di $1681 = 40^2 + 80 + 1 = 41^2$ e quindi $x = 20$ e $y = 49$.