



Kangourou della Matematica 2017
finale nazionale italiana
Cervia, 30 settembre 2017



LIVELLO BENJAMIN

Tutte le risposte devono essere giustificate

B1. (5 punti) Un padre di 68 anni ha due figli di 37 e 42 anni. Quanti anni fa la somma delle età dei due figli era uguale all'età del padre?

B2. (7 punti) Una linea aerea consente di portare un bagaglio senza sovrapprezzo purché il peso non ecceda una certa soglia; in caso di eccedenza di peso, occorre pagare una somma in più per ogni chilo (o frazione di chilo) oltre la soglia. I bagagli di Anna e Marco hanno lo stesso peso: complessivamente pesano 60 chili e, sempre complessivamente, i due hanno dovuto pagare 11 euro in più. Anche Enrico ha un bagaglio: pesa 60 chili e lui ha dovuto pagare 33 euro in più. Di quanti chili è la soglia oltre la quale occorre pagare il sovrapprezzo?

B3. (11 punti) Un amico ti invita a giocare a dadi nel modo seguente. Tu e lui lanciate più volte due dadi identici non truccati, con le facce numerate, come al solito, da 1 a 6 e calcolate la somma dei punti ottenuti. Se la somma è 9 vince uno di voi due, se la somma è 10 vince l'altro, se la somma è diversa da 9 e da 10 non vince nessuno dei due. Ti lascia scegliere, fra 9 e 10, la somma che ti fa vincere, tenendo per sé quella delle due che non hai scelto. Quale ti conviene scegliere e perché?

B4. (14 punti) Lucilla ha diverse caramelle: 6 alla menta, 7 al limone, 8 all'arancia e 12 alla fragola. Vuole regalarne 3 a ciascuno di alcuni suoi amici, ma ogni amico chiede di avere caramelle tutte di gusti diversi fra loro. Tenendo conto del desiderio degli amici, quanti amici può accontentare, al massimo?

B5. (18 punti) Un aereo di linea vola giornalmente da un aeroporto A ad un aeroporto B e ritorna da B ad A lungo la stessa rotta rettilinea, sempre tenendo i motori al massimo possibile della potenza. Ieri c'era totale assenza di vento, oggi invece per tutta la giornata ha spirato un vento a velocità costante da A verso B . Nel complesso dei due voli, oggi ha impiegato lo stesso tempo di ieri? Un tempo minore? Un tempo maggiore? Giustifica la tua risposta come ritieni più opportuno.

B6. (22 punti) Esistono sequenze di (almeno due) numeri interi positivi consecutivi tali che la somma delle cifre di ciascun numero della sequenza sia divisibile per 7? In caso affermativo, quanti numeri vi possono essere al massimo in una di queste sequenze?



Kangourou della Matematica 2017
finale nazionale italiana
Cervia, 30 settembre 2017



LIVELLO BENJAMIN

SOLUZIONI

B1. (5 punti) Un padre di 68 anni ha due figli di 37 e 42 anni. Quanti anni fa la somma delle età dei due figli era uguale all'età del padre?

Risposta: 11 anni fa.

Soluzione. Il padre ha avuto i due figli a 26 e 31 anni; quindi quando il primo figlio aveva 31 anni, la somma delle età dei due figli $31+26 = 57$ era esattamente l'età del padre.

B2. (7 punti) Una linea aerea consente di portare un bagaglio senza sovrapprezzo purché il peso non ecceda una certa soglia; in caso di eccedenza di peso, occorre pagare una somma in più per ogni chilo (o frazione di chilo) oltre la soglia. I bagagli di Anna e Marco hanno lo stesso peso: complessivamente pesano 60 chili e, sempre complessivamente, i due hanno dovuto pagare 11 euro in più. Anche Enrico ha un bagaglio: pesa 60 chili e lui ha dovuto pagare 33 euro in più. Di quanti chili è la soglia oltre la quale occorre pagare il sovrapprezzo?

Risposta: 24.

Soluzione. Il sovrapprezzo per ogni chilo oltre la soglia è $(33 - 5,5) / 30$: allora i chili in più per Anna (e Marco) sono $5,5 \times 30 / 27,5 = 6$.

B3. (11 punti) Un amico ti invita a giocare a dadi nel modo seguente. Tu e lui lanciate più volte due dadi identici non truccati, con le facce numerate, come al solito, da 1 a 6 e calcolate la somma dei punti ottenuti. Se la somma è 9 vince uno di voi due, se la somma è 10 vince l'altro, se la somma è diversa da 9 e da 10 non vince nessuno dei due. Ti lascia scegliere, fra 9 e 10, la somma che ti fa vincere, tenendo per sé quella delle due che non hai scelto. Quale ti conviene scegliere e perché?

Risposta: 9.

Soluzione. Chiamiamo A un dado e B l'altro. Una coppia (non ordinata, l'ordine degli addendi è inessenziale per la somma) di numeri x e y diversi è ottenibile sia quando A fornisce x e B fornisce y , sia quando accade l'inverso: allora una tale coppia $\{x, y\}$ ha probabilità doppia di presentarsi rispetto ad una coppia $\{x, x\}$ (ottenibile solo quando sia A sia B forniscono x). 9 è realizzabile solo come $6 + 3$ o $5 + 4$, 10 è realizzabile solo come $6 + 4$ o $5 + 5$.

B4. (14 punti) Lucilla ha diverse caramelle: 6 alla menta, 7 al limone, 8 all'arancia e 12 alla fragola. Vuole regalarne 3 a ciascuno di alcuni suoi amici, ma ogni amico chiede di avere caramelle tutte di gusti diversi fra loro. Tenendo conto del desiderio degli amici, quanti amici può accontentare, al massimo?

Risposta: 10.

Soluzione. Lucilla ha complessivamente 33 caramelle, ma non può regalarne più di 10 terne, ogni terna con gusti diversi tra loro, perché in ogni terna devono esserci almeno due caramelle tra quelle alla menta, al limone e all'arancia, e complessivamente queste sono 21. In effetti riesce a formare 10 terne di caramelle, ogni terna con gusti diversi fra loro, ad esempio nel modo seguente (di ogni gusto sono riportate le iniziali):

3 terne {m, a, f},

2 terne {m, l, f},

4 terne {l, a, f},

1 terna {m, l, a}.

B5. (18 punti) Un aereo di linea vola giornalmente da un aeroporto A ad un aeroporto B e ritorna da B ad A lungo la stessa rotta rettilinea, sempre tenendo i motori al massimo possibile della potenza. Ieri c'era totale assenza di vento, oggi invece per tutta la giornata ha spirato un vento a velocità costante da A verso B . Nel complesso dei due voli, oggi ha impiegato lo stesso tempo di ieri? Un tempo minore? Un tempo maggiore? Giustifica la tua risposta come ritieni più opportuno.

Risposta: un tempo maggiore.

Soluzione. L'incremento di velocità (dovuto al vento) nel tragitto di andata è quantitativamente uguale al decremento subito nel tragitto di ritorno, ma la velocità inferiore è stata tenuta per un tempo maggiore a quello per cui è stata tenuta quella superiore.

B6. (22 punti) Esistono sequenze di (almeno due) numeri interi positivi consecutivi tali che la somma delle cifre di ciascun numero della sequenza sia divisibile per 7? In caso affermativo, quanti numeri vi possono essere al massimo in una di queste sequenze?

Risposta: Sì, ad es. 69999 e 69999 + 1. Non più di due.

Soluzione. È chiaro che esistono infinite coppie di questo tipo. Non esistono più di due numeri consecutivi con la proprietà richiesta. Infatti due numeri consecutivi hanno come somma delle cifre due numeri consecutivi, tranne nel caso in cui il più piccolo dei due ha come cifra delle unità 9: dato che due numeri consecutivi non possono essere entrambi divisibili per 7, realizzano la condizione solo sequenze di due numeri opportuni il più piccolo dei quali ha 9 come cifra delle unità.