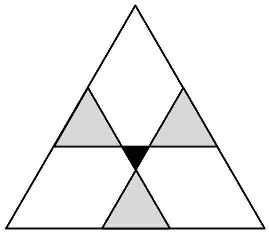
Kangourou della Matematica 2016
finale nazionale italiana
Cervia, 9 maggio 2016

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate



C1. (*5 punti*) Osserva la figura. Tutti i triangoli che puoi vedere sono equilateri: i lati di quello nero (il più piccolo) sono lunghi 2 cm, i lati di quelli grigi sono lunghi tutti 5 cm. Quanto sono lunghi i lati del triangolo più grande (quello che li contiene tutti)? Come suggerisce la figura, i lati dei triangoli grigi e di quello nero che hanno vertici in comune stanno su una stessa retta.

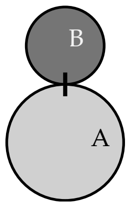
C2. (*7 punti*) La moneta di Kanglandia è il *kang*. A Kangcity il cambio euro - *kang* funziona così: si ottiene 1 *kang* pagando 1,20 euro, si ottiene 1 euro pagando 1 *kang* e proporzionalmente se si cambiano monete di valore inferiore. In entrambe le valute la moneta di valore minimo è quella da un centesimo; si può cambiare qualunque quantità di denaro e il risultato del cambio, se non è esprimibile con un numero intero di centesimi, viene arrotondato al centesimo per eccesso. Sono a Kangcity e ho solo euro. Esiste un modo (lecito) di acquistare un gelato che costa 2 *kang* spendendo solo 2 euro? In caso affermativo, qual è il minimo numero di cambi che mi consente di farlo?

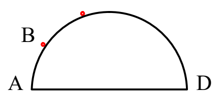
C3. (*11 punti*) L'alunno Fox per essere promosso deve sostenere, commettendo al massimo un errore, una prova a risposta chiusa. Può scegliere tra due buste:

- la busta A che contiene 7 quesiti, ciascuno con 2 risposte,
- la busta B che contiene 3 quesiti, ciascuno con 6 risposte.

Fox è impreparato e pensa di rispondere a caso ai quesiti. Se vuole essere promosso, gli conviene scegliere la busta A o la B?

C4. (*14 punti*) In figura sono schematizzate due monete circolari sul bordo di ciascuna delle quali c'è una tacca; le due monete si toccano in corrispondenza delle tacche. Il diametro della moneta A, la più grande, misura 18 mm. Se la moneta B inizia a ruotare attorno alla moneta A, rimanendole sempre a contatto, deve compiere esattamente due giri attorno alla A perché si ripresenti per la prima volta la situazione in figura (cioè le due monete vengano a toccarsi ancora in corrispondenza delle tacche). Sapendo che anche il diametro della moneta B misura un numero intero di millimetri, che cosa si può dire di tale lunghezza?

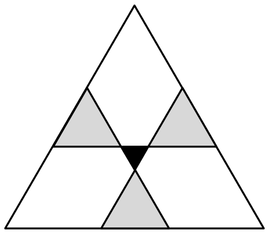




C5. (*22 punti*) In figura vedi una semi-circonferenza di diametro 8. I punti A e D ne sono gli estremi, i punti B e C sono altri due punti della semi-circonferenza che distano 2 rispettivamente dal punto A e dal punto B. Quanto dista il punto C dal punto D?

C6. (*18 punti*) Nella strana repubblica di Kang gli anni durano 3000 giorni, numerati da 1 a 3000. I giorni festivi sono quelli il cui numero è divisibile per 6 oppure è un numero primo: gli altri sono giorni lavorativi. Se venisse aggiunto ai giorni festivi anche ogni giorno di "ponte", cioè giorno lavorativo preceduto e seguito da un giorno festivo, quanti giorni festivi in più ci sarebbero in ogni anno?

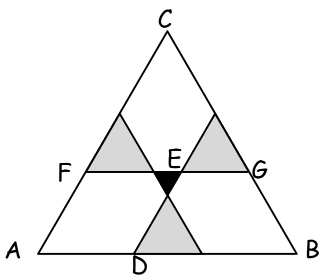
LIVELLO CADET



C1. (*5 punti*) Osserva la figura. Tutti i triangoli che puoi vedere sono equilateri: i lati di quello nero (il più piccolo) sono lunghi 2 cm, i lati di quelli grigi sono lunghi tutti 5 cm. Quanto sono lunghi i lati del triangolo più grande (quello che li contiene tutti)? Come suggerisce la figura, i lati dei triangoli grigi e di quello nero che hanno vertici in comune stanno su una stessa retta.

Risposta: 19 cm.

Soluzione. Osserviamo che il quadrilatero *ADEF* che si ottiene accostando il triangolo nero al pentagono bianco in basso a sinistra è un rombo:



infatti $C\hat{F}G = C\hat{A}B = H\hat{D}B$ (in quanto angoli di triangoli equilateri) e quindi i lati opposti del quadrilatero sono paralleli. Inoltre *EF* e *DE* sono congruenti poiché ciascuno è somma del lato di un triangolo grigio e di quello del triangolo nero (e i triangoli grigi sono congruenti): la loro lunghezza vale 7 cm. Lo stesso ragionamento può essere svolto sul quadrilatero in basso a destra e, visto che i triangoli grigi sono congruenti, i due rombi sono congruenti. Dunque *AB* è lungo 7 x 2 + 5 = 19 cm.

C2. (*7 punti*) La moneta di Kanglandia è il *kang*. A Kangcity il cambio euro - *kang* funziona così: si ottiene 1 *kang* pagando 1,20 euro, si ottiene 1 euro pagando 1 *kang* e proporzionalmente se si cambiano monete di valore inferiore. In entrambe le valute la moneta di valore minimo è quella da un centesimo; si può cambiare qualunque quantità di denaro e il risultato del cambio, se non è esprimibile con un numero intero di centesimi, viene arrotondato al centesimo per eccesso. Sono a Kangcity e ho solo euro. Esiste un modo (lecito) di acquistare un gelato che costa 2 *kang* spendendo solo 2 euro? In caso affermativo, qual è il minimo numero di cambi che mi consente di farlo?

Risposta: sì, 40.

Soluzione. Devo riuscire ad ottenere 1 centesimo di *kang* per ogni centesimo di euro. Se cambio 5 centesimi di euro, per via dell'arrotondamento ottengo 5 centesimi di *kang* (si ha 5/1,2 > 4), ma se ne cambio di più ottengo comunque almeno 1 centesimo di *kang* in meno rispetto ai centesimi di euro che ho cambiato.

C3. (*11 punti*) L'alunno Fox per essere promosso deve sostenere, commettendo al massimo un errore, una prova a risposta chiusa. Può scegliere tra due buste:

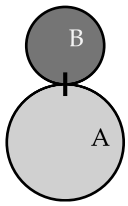
- la busta *A* che contiene 7 quesiti, ciascuno con 2 risposte,
- la busta B che contiene 3 quesiti, ciascuno con 6 risposte.

Fox è impreparato e pensa di rispondere a caso ai quesiti. Se vuole essere promosso, gli conviene scegliere la busta *A* o la B?

Risposta: la busta B.

Soluzione. Nella prova della busta *A* le possibili sequenze di risposte sono $2^7 = 128$ e, visto che le possibili sequenze di almeno 6 quesiti corretti su 7 sono 8, la probabilità di indovinare le sei risposte richieste è 8/128. Nella prova della busta B le possibili sequenze di risposte sono $6^3 = 216$ e, visto che le possibili sequenze di almeno 2 quesiti corretti su 3 sono 16, la probabilità di indovinare le due risposte richieste è $16/216 = 2/27 > 1/16 = 8/128$.

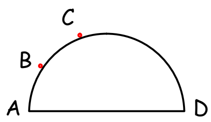
C4. (*14 punti*) In figura sono schematizzate due monete circolari sul bordo di ciascuna delle quali c'è una tacca; le due monete si toccano in corrispondenza delle tacche. Il diametro della moneta *A*, la più grande, misura 18 mm. Se la moneta B inizia a ruotare attorno alla moneta *A*, rimanendole sempre a contatto, deve compiere esattamente due giri attorno alla *A* perché si ripresenti per la prima volta la situazione in figura (cioè le due monete vengano a toccarsi ancora in corrispondenza delle tacche). Sapendo che anche il diametro della moneta B misura un numero intero di millimetri, che cosa si può dire di tale lunghezza?



Risposta: vale 4 o 12 mm.

Soluzione. Il segmento che rappresenta la circonferenza rettificata della moneta *A* (lungo 18π) non contiene un multiplo intero del segmento che rappresenta la circonferenza rettificata della moneta B (lungo $d\pi$, se d è il diametro in mm), ma il suo doppio sì, cioè si ha $36 = kd$ con k intero, ove per ipotesi $d < 18$ e d non divide 18 (altrimenti la situazione si ripresenterebbe per la prima volta dopo un giro): le uniche possibilità per d sono quindi 4 e 12.

C5. (*18 punti*) In figura vedi una semi-circonferenza di diametro 8. I punti A e D ne sono gli estremi, i punti B e C sono altri due punti della semi-circonferenza che distano 2 rispettivamente dal punto A e dal punto B. Quanto dista il punto C dal punto D?



Risposta: 7.

Soluzione. Detto O il centro della semicirconferenza, ognuno dei due triangoli isosceli AOB e BOC (tra loro congruenti, avendo basi congruenti e lati obliqui che sono raggi della semicirconferenza) ha base di lunghezza 2 e altezza $\sqrt{15}$. Quindi l'"aquilone" ABCO ha area $2\sqrt{15}$ e, dato che il raggio OB è perpendicolare ad AC (poiché è la bisettrice dell'angolo al vertice del triangolo isoscele AOC), il lato AC misura $4\sqrt{15}/4 = \sqrt{15}$. Per il teorema di Pitagora applicato ad ACD, CD ha lunghezza 7.

Precisazioni visti gli svolgimenti.
1) In un quesito di geometria euclidea come questo, la distanza tra due punti è la lunghezza del segmento che li congiunge (non quella dell'arco).
2) Il triangolo AOC non può essere equilatero poiché i due raggi AO e BO hanno lunghezza 4 mentre la corda AC ha lunghezza minore di 4, dato che è la base del triangolo isoscele ABC i cui lati obliqui hanno lunghezza 2.

C6. (*22 punti*) Nella strana repubblica di Kang gli anni durano 3000 giorni, numerati da 1 a 3000. I giorni festivi sono quelli il cui numero è divisibile per 6 oppure è un numero primo: gli altri sono giorni lavorativi. Se venisse aggiunto ai giorni festivi anche ogni giorno di "ponte", cioè giorno lavorativo preceduto e seguito da un giorno festivo, quanti giorni festivi in più ci sarebbero in ogni anno?

Risposta: 2.

Soluzione. Certamente si devono aggiungere come giorno di "ponte" il giorno 1 di ciascun anno (compreso tra 3000 divisibile per 6 e 2 primo) e il giorno 4 compreso tra due primi gemelli. Non ci sono altri giorni da aggiungere perché quelli divisibili per 6 non hanno "a distanza 2" né giorni primi (dovrebbero essere pari e diversi da 2), né giorni multipli di 6; i giorni primi possono avere "a distanza 2" altri primi (primi gemelli), ma escluso il caso di 3 e 5, in tutti gli altri casi il numero tra essi compreso è contemporaneamente pari e divisibile per 3 (dato che non lo è nessuno dei due primi p e $p+2$) e quindi è già nella lista dei festivi.