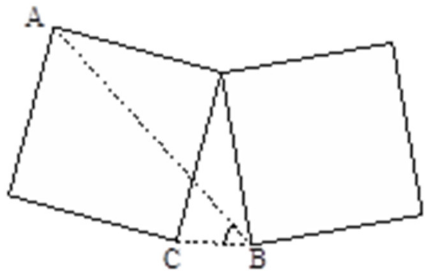
LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) La figura mostra due quadrati uguali che hanno in comune esattamente un vertice. È possibile precisare la misura dell'angolo ABC?



S2. (*7 punti*) Negli usuali fogli (rettangolari) formato A4 il rapporto fra la lunghezza del lato più lungo e quella del lato più corto è $\sqrt{2}$. Vuoi disegnare su uno di tali fogli una griglia di dimensioni (n + 1) × n formata da celle quadrate, non importa di quale taglia, ma la stessa per tutte le celle. Vuoi fare in modo che ogni lato della griglia sia parallelo a un bordo del foglio e che la distanza di ciascuno dei lati della griglia dal bordo del foglio più vicino sia la stessa, non importa quale, per ciascuno dei quattro lati. Quanti sono i possibili valori di n?

S3. (*11 punti*) A Kanglandia la moneta in uso è il kang e vi sono solo monete da 1, 2 o 3 kang. Ovviamente, con monete come queste, si può realizzare qualunque importo di un numero intero di kang. Dimostra che, per ogni numero intero positivo N, i diversi modi possibili per realizzare l'importo di N + 1 kang sono in numero strettamente superiore ai diversi modi possibili di realizzare l'importo di N kang.
Attenzione: per ottenere, ad esempio, 4 kang, il modo 1 + 1 + 2 va considerato uguale al modo 1 + 2 + 1 (ma non al modo 2 + 2).

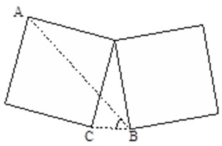
S4. (*14 punti*) 51 corvi sono appollaiati in fila su un ramo di un grosso albero. Ogni volta (e solo ogni volta) che uno di essi gracchia, il suo vicino di destra e quello di sinistra, se esistono, si alzano in volo. Ogni corvo che prende il volo vola per esattamente un minuto, poi riprende il suo posto lanciando immediatamente una sonora gracchiata. Questa mattina il primo a gracchiare è stato il corvo all'estremità del ramo e poi hanno proseguito, secondo la regola descritta, per un'ora esatta: allo scadere dell'ora tutti i corvi in volo sono tornati sul ramo facendo ciascuno un'ultima sonora gracchiata. Quante sono state in quell'ora, dal primo all'ultimo istante inclusi, le gracchiate fatte?

S5. (*18 punti*) Dato un triangolo, qual è il numero minimo di rette parallele ai lati che occorre tracciare per suddividerlo in esattamente 100 regioni?

S6. (*22 punti*) Tre circonferenze nello spazio sono a due a due tangenti e i tre punti di tangenza sono tutti diversi tra loro. Ne segue necessariamente che le tre circonferenze o sono complanari oppure giacciono su una stessa sfera?

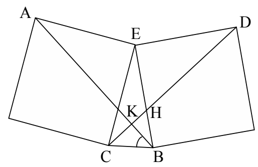
LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) La figura mostra due quadrati uguali che hanno in comune esattamente un vertice. È possibile precisare la misura dell'angolo ABC?



Risposta: sì, misura 45 gradi.

Soluzione. Con riferimento alla figura, i segmenti AB e DC sono perpendicolari: infatti gli angoli ABE e EDC sono uguali, dunque i triangoli HKB e DEH sono simili, con il secondo rettangolo in E e dunque il primo rettangolo in K. Ne segue che il triangolo (chiaramente) isoscele BKC è rettangolo in K.



<u>In alternativa</u>: dette x e y le misure (in gradi) rispettivamente degli angoli ABC (= DCB) e EBA, la misura dell'angolo CEB è espressa sia da 180 - 2(x + y) sia da 90 - 2y (infatti l'angolo AEB misura 180 - 2y). Ne segue 2x = 90.

<u>In alternativa</u>: i triangoli AEB e CED (isosceli e congruenti) si ottengono uno dall' altro per rotazione di 90 gradi attorno a E (ad esempio CED si ottiene ruotando EB in senso antiorario fino a sovrapporlo a ED). Ne segue che il triangolo isoscele BKC è rettangolo in K.

S2. (*7 punti*) Negli usuali fogli (rettangolari) formato A4 il rapporto fra la lunghezza del lato più lungo e quella del lato più corto è $\sqrt{2}$. Vuoi disegnare su uno di tali fogli una griglia di dimensioni (n + 1) × n formata da celle quadrate, non importa di quale taglia, ma la stessa per tutte le celle. Vuoi fare in modo che ogni lato della griglia sia parallelo a un bordo del foglio e che la distanza di ciascuno dei lati della griglia dal bordo del foglio più vicino sia la stessa, non importa quale, per ciascuno dei quattro lati. Quanti sono i possibili valori di n?

Risposta: solo 1 e 2. **Soluzione.**

Senza ledere la generalità possiamo assumere che le lunghezze dei lati del foglio siano 1 e $\sqrt{2}$. Sia x la lunghezza del lato delle celle quadrate e y la distanza da tenere dai bordi. Deve essere 2y + nx = 1 e 2y + (n + 1)x = $\sqrt{2}$, da cui x = $\sqrt{2}$ - 1. Inserendo questo valore nella prima delle due uguaglianze, si ricava y = (n + 1 - $\sqrt{2}$ n)/2. Questa quantità è sicuramente positiva per n = 1 e per n = 2, mentre per valori interi di n > 2 è certamente negativa, contro l'ipotesi che y sia una distanza.

S3. (*11 punti*) A Kanglandia la moneta in uso è il kang e vi sono solo monete da 1, 2 o 3 kang. Ovviamente, con monete come queste, si può realizzare qualunque importo di un numero intero di kang. Dimostra che, per ogni numero intero positivo N, i diversi modi possibili per realizzare l'importo di N + 1 kang sono in numero strettamente superiore ai diversi modi possibili di realizzare l'importo di N kang.
Attenzione: per ottenere, ad esempio, 4 kang, il modo 1 + 1 + 2 va considerato uguale al modo 1 + 2 + 1 (ma non al modo 2 + 2).

Soluzione.
I modi di totalizzare N + 1 kang sono almeno tanti quanti quelli di totalizzare N kang: basta aggiungere un moneta di 1 kang ad ognuno di questi ultimi. Allora è sufficiente mostrare che esiste almeno un modo di totalizzare N + 1 kang senza usare monete da 1 kang: se N + 1 è pari si possono usare solo monete da 2 kang; se N + 1 è dispari, è almeno 3, dunque è sufficiente usare una moneta da 3 kang e solo monete da 2 kang (se N > 2).

S4. (*14 punti*) 51 corvi sono appollaiati in fila su un ramo di un grosso albero. Ogni volta (e solo ogni volta) che uno di essi gracchia, il suo vicino di destra e quello di sinistra, se esistono, si alzano in volo. Ogni corvo che prende il volo vola per esattamente un minuto, poi riprende il suo posto lanciando immediatamente una sonora gracchiata. Questa mattina il primo a gracchiare è stato il corvo all'estremità del ramo e poi hanno proseguito, secondo la regola descritta, per un'ora esatta: allo scadere dell'ora tutti i corvi in volo sono tornati sul ramo facendo ciascuno un'ultima sonora gracchiata. Quante sono state in quell'ora, dal primo all'ultimo istante inclusi, le gracchiate fatte?

Risposta: 931.
Soluzione. Quando gracchia il primo corvo, se ne alza in volo solo 1, quello di posizione 2; quando questo atterra sul ramo si alzano il primo e il terzo, quando atterrano questi il secondo e il quarto, quando atterrano il 2 e il 4 se ne alzano 3, (di posti 1,3,5) e quando questi si posano di nuovo 3 (di posti 2,4,6) e così via fin quando posandosi i 25 di posto pari, non si alzano per la prima volta tutti i 26 di posto dispari. Per far questo occorrono $1 + 2 \times 24 = 49$ minuti e le gracchiate fino a questo punto sono state $2 \times \sum_1^{25} k = 25 \times 26$. Da questo momento si alzano e si posano alternatamente tutti i corvi di posto pari e tutti quelli di posto dispari, precisamente al 50-mo minuto si posano 26 corvi, al 51-esimo 25, ecc. per finire con 26 al 60-mo minuto, gracchiando in totale $26 + (25 + 26) \times 5$. In totale $26^2 + 255 = 931$.

S5. (*18 punti*) Dato un triangolo, qual è il numero minimo di rette parallele ai lati che occorre tracciare per suddividerlo in esattamente 100 regioni?

Risposta: 16.

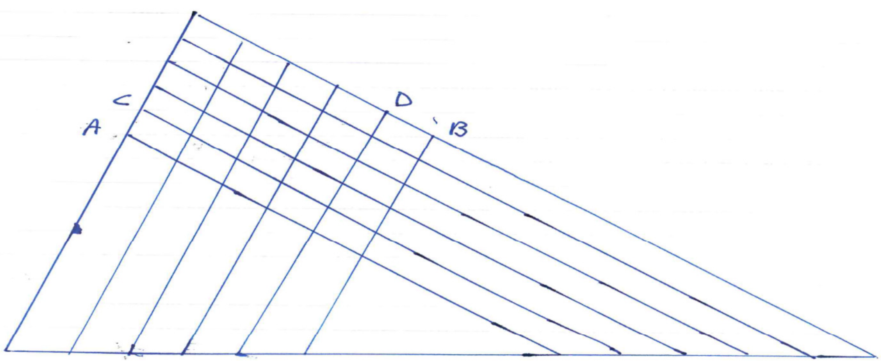
Soluzione. Detti i, j, k i numeri delle rette parallele a ciascuno dei tre lati tracciate, osserviamo che, per dividere il triangolo nel maggior numero di parti con i, j, k fissati occorre e basta che le tutte le i e j rette parallele ai primi due lati si intersechino all' interno del triangolo e che ciascuna delle k rette parallele al terzo lato intersechi in punti distinti del triangolo ciascuna delle altre i + j rette. In tal caso il triangolo viene diviso in $(i + 1)(j + 1) + k(i + j + 1)$ parti; dobbiamo quindi avere

$(i + 1)(j + 1) + k(i + j + 1) \geq 100$ cioè $ij + k(i + j) + i + j + k \geq 99$.

Questo è possibile ad esempio con la terna (5,5,6), che dà $(i + 1)(j + 1) + k(i + j + 1) = 102$ (o anche con le terne (6,6,4) e (7,5,4) che danno rispettivamente 101 e 100).

Incominciamo con il dimostrare che se $i + j + k < 16$ la disuguaglianza non può mai essere verificata. Supponiamo che $i + j + k = 15$; l'esame di questo caso mostra anche che si possono escludere i casi $i + j + k < 15$. Riscriviamo la nostra disuguaglianza come $ij + k(15 - k) \geq 84$; per motivi di simmetria tra k e 15 - k consideriamo solo k = 0,1,...,7: il massimo del valore di $ij + k(15 - k)$ si ottiene, per ogni k fissato, per la coppia i,j di valori più vicini a $\frac{15-k}{2}$, e vale rispettivamente 56, 63, 68, 72, 74, 75, 74, 72.

Ora vogliamo ottenere una partizione in esattamente 100 parti. Se abbiamo scelto la terna (7,5,4) siamo già a posto. Supponiamo invece di aver scelto la terna (5,5,6) che per i + j + k = 16 dà il valore massimo. Disegniamo un triangolo con un lato (base) orizzontale e 5 + 5 rette parallele ai due lati obliqui del triangolo, che si intersechino come richiesto dividendo il triangolo in 36 parti: possiamo supporre, senza causare restrizioni, che i punti di intersezione delle rette con i lati siano alla stessa quota sui due lati. Consideriamo il segmento parallelo alla base che congiunge i punti A e B in figura: ogni retta parallela alla base che attraversi il triangolo sotto il segmento AB interseca tutte le 10 rette e quindi, se non passa per un loro punto di intersezione (poiché i punti di intersezione sono un numero finito esistono infinite rette con tale proprietà), divide ognuna delle 11 regioni che attraversa in due parti, aumentando quindi di 11 il numero delle parti: con 5 rette di tal tipo siamo a 91 parti. Ora (v. figura) tracciamo una retta parallela alla base che stia sopra ad AB ma sotto a CD, e che non incontri punti di intersezione: questa incontra solo 8 rette, spezzando in due 9 regioni e ci fa quindi arrivare esattamente a 100 parti.



S6. (*22 punti*) Tre circonferenze nello spazio sono a due a due tangenti e i tre punti di tangenza sono tutti diversi tra loro. Ne segue necessariamente che le tre circonferenze o sono complanari oppure giacciono su una stessa sfera?

Risposta: è vero.

Soluzione. Dimostriamo per prima cosa che, nello spazio, ogni coppia di circonferenze tangenti non complanari determina una e una sola sfera che le contiene entrambe.

Chiamiamo Γ_1 e Γ_2 le due circonferenze e C_1 e C_2 i rispettivi centri; sia P il punto di intersezione di Γ_1 e Γ_2. Consideriamo il piano π per P perpendicolare alla tangente comune alle due circonferenze: i centri C_1 e C_2 appartengono a π; consideriamo in π le rette passanti per C_1 e C_2 e ortogonali ai raggi PC_1 e PC_2 rispettivamente: poiché esse giacciono sul piano ortogonale alla retta tangente in P, ciascuna di tali rette è ortogonale al piano della rispettiva circonferenza. Visto che PC_1 e PC_2 non sono paralleli perché Γ_1 e Γ_2 non sono complanari, le due rette si intersecano in un punto, che chiamiamo C ; verifichiamo che la sfera S di centro C e raggio $r= |PC|$ contiene Γ_1. Detto X il generico punto di Γ_1, poiché CC_1 è ortogonale a PC_1 ed a XC_1 si ha

$|XC_1|^2+ |CC_1|^2 =|PC_1|^2+ |CC_1|^2=|PC|^2$, cvd.

Analogo risultato vale per Γ_2.

Ora supponiamo per assurdo che la sfera $S_{1,2}$ determinata da Γ_1 e Γ_2 e la sfera $S_{1,3}$ determinata da Γ_1 e Γ_3 siano distinte: la loro intersezione è una circonferenza, e quindi coincide con Γ_1. Allora il punto comune a Γ_2 e Γ_3 appartiene anche a Γ_1, contro l' ipotesi.