

Kangourou della Matematica 2013
Coppa a squadre Kangourou - finale
Cervia, 5 maggio 2013



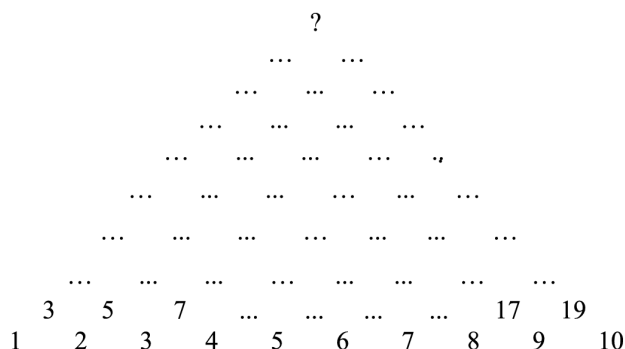
Quesiti

1. La somma di quest'anno

La somma $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots$ vale 2013. Quanti sono gli addendi?

2. Il triangolo numerato

Una tabella di numeri ha l'aspetto di un triangolo: in figura ne vedete una parte. L'ultima riga è formata dagli interi da 1 a 10 inclusi; ogni numero che compare in ogni riga, fino alla penultima, è la somma dei due numeri che, nella riga successiva, stanno uno immediatamente alla sua sinistra e l'altro immediatamente alla sua destra. Qual è l'unico numero che compone la prima riga?



3. Il rombo

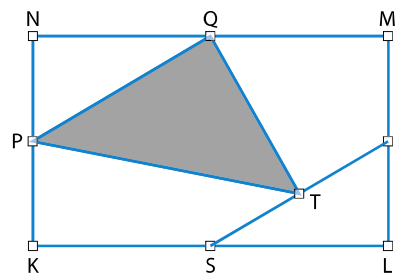
Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O in modo tale che il quadrilatero $ABCO$ (i suoi vertici sono qui elencati in senso antiorario) sia un rombo. Quanti gradi misura l'angolo ABC ?

4. Senza quadrati e senza cubi

La sequenza $2, 3, 5, 6, 7, 10, \dots$ contiene tutti i numeri interi positivi che non sono né quadrati né cubi perfetti. Quale numero occupa il 2013-mo posto di questa sequenza?

5. Un rettangolo e un triangolo

Osservate la figura. $KLMN$ è un rettangolo, ciascuno dei punti P, Q, R e S è il punto medio del lato del rettangolo su cui giace e T è il punto medio di RS . Se l'area del rettangolo $KLMN$ è 70 decimetri quadrati, quanti centimetri quadrati è l'area del triangolo PQT ?



6. Letto al contrario

Qual è il numero di quattro cifre significative $ABCD$ (dunque con la cifra A delle migliaia diversa da 0) tale che $4 \times ABCD = DCBA$?

7. Cifra divide cifra

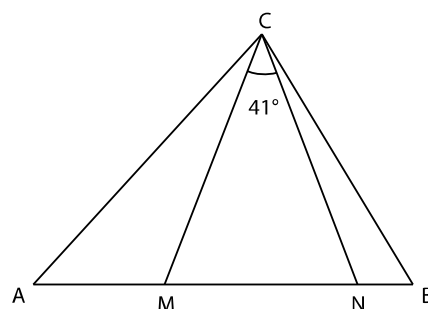
Quanti sono i numeri (positivi) di tre cifre (significative) abc tali che a sia divisibile per b e b sia divisibile per c ?

8. Ora solare

C'è una sola strada che porta dalla casa di Luigi a quella di Emma. Ogni mattina Luigi parte in auto dalla propria casa e arriva alle 9.00 a casa di Emma: lei si fa trovare pronta e lui la porta in auto a casa propria. La mattina del 28 ottobre scorso Emma si è dimenticata che nella notte era avvenuto il passaggio dall'ora legale a quella solare: si è così presentata alle 8.00 alla porta di casa e, non vedendo arrivare Luigi, si è incamminata lungo la strada andando incontro all'auto di Luigi. Dopo un certo tempo ha incontrato l'auto che la stava andando a prendere: immediatamente Luigi si è fermato e ha invertito la marcia, Emma è salita e i due sono arrivati a casa di Luigi con 12 minuti di anticipo rispetto al solito. Luigi guida a velocità costante e non è stato perso tempo nell'operazione di invertire la marcia e di prendere a bordo Emma. Quanti minuti ha camminato Emma?

9. L'angolo

Nel triangolo ABC in figura i punti M e N sul lato AB sono determinati in modo che il segmento AN sia lungo quanto il segmento AC e il segmento BM sia lungo quanto il segmento BC . L'angolo MCN misura 41 gradi. Quanti gradi misura l'angolo ACB ?



10. Il coefficiente

Svolgendo il prodotto $(1-x)(1-2x)(1-3x) \dots (1-10x)$ e raccogliendo i termini simili si ottiene un'espressione del tipo $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Mx^{10}$. Quanto vale C ?

11. Cubetti bianchi e cubetti neri

Abbiamo tanti cubetti bianchi e neri, tutti della stessa dimensione, e vogliamo comporre un parallelepipedo formato da 2013 cubetti in modo che, in ognuna delle tre direzioni ciascuna parallela ad uno spigolo, vi sia più di un cubetto e si alternino cubetti bianchi e cubetti neri. Se partiamo sistemando un cubetto nero in uno degli otto vertici del parallelepipedo, quanti dei cubetti neri saranno visibili sulla superficie esterna del parallelepipedo?

12. Approssimazione

Sapete che $x = 1^2/1 + 2^2/3 + 3^2/5 + \dots + 10^2/19$ e $y = 1^2/3 + 2^2/5 + 3^2/7 + \dots + 10^2/21$. Qual è il numero intero più vicino a $1000(x-y)$?

13. Quest'anno al quadrato

Quanti divisori distinti, inclusi 1 e se stesso, ha il numero 2013^2 ?

14. Due zeri alla fine

Quanti sono i numeri tali che:

- la loro scrittura termina esattamente con due zeri (cioè sono zero le ultime due cifre, ma non la terz'ultima);
- sono esprimibili come prodotto di sette interi positivi consecutivi tutti minori di 26?

15. La piramide pentagonale

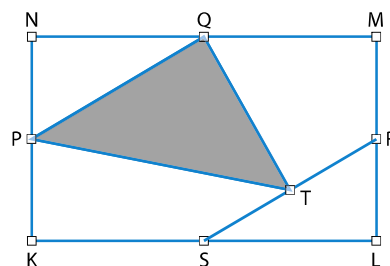
La base di una piramide di vertice V è un pentagono regolare $ABCDE$ e le sue cinque facce sono triangoli equilateri. Qual è la misura in gradi dell'angolo AVC ?

La sequenza 2, 3, 5, 6, 7, 10, ... contiene tutti i numeri interi positivi che non sono né quadrati né cubi perfetti. Quale numero occupa il 2013-mo posto di questa sequenza?

[2067] I quadrati (positivi) minori di 2013 sono 44 (infatti $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$, $46^2 = 2116$), i cubi minori di 2013 sono 12 (infatti $12^3 = 1728$, $13^3 = 2197$); di questi, solo 1, 64 e 729 sono sia quadrati sia cubi. Si ha $44 + 12 - 3 = 53$, $2013 + 53 = 2066$, ma $2025 < 2066 < 2197$: occorre dunque eliminare dalla lista anche il numero 2025.

5. Un rettangolo e un triangolo

Osservate la figura. $KLMN$ è un rettangolo, ciascuno dei punti P , Q , R e S è il punto medio del lato del rettangolo su cui giace e T è il punto medio di RS . Se l'area del rettangolo $KLMN$ è 70 decimetri quadrati, quanti centimetri quadrati è l'area del triangolo PQT ?



[1750] L'area del triangolo PQT è la metà di quella del rombo $PQRS$. Questa, a sua volta, è la metà dell'area del rettangolo $KLMN$.

6. Letto al contrario

Qual è il numero di quattro cifre significative $ABCD$ (dunque con la cifra A delle migliaia diversa da 0) tale che $4 \times ABCD = DCBA$?

[2178] Chiaramente deve essere $A < 3$ (4×3 è un numero di due cifre): dal momento che $DCBA$ è un numero pari, deve essere $A = 2$. Da $4 \times 2BCD = DCB2$, segue che deve essere $D \geq 8$: poiché il prodotto $4 \times D$ termina con la cifra 2, deve essere $D = 8$. Dunque si deve avere $4 \times 2BC8 = 8CB2$, cioè $8000 + 400 \times B + 40 \times C + 32 = 8000 + 100 \times C + 10 \times B + 2$ che implica $13 \times B + 1 = 2 \times C$. $2 \times C$ è pari e non maggiore di 18, dunque B è dispari e minore di 2: ne segue $B = 1$ e $C = 7$

7. Cifra divide cifra

Quanti sono i numeri (positivi) di tre cifre (significative) abc tali che a sia divisibile per b e b sia divisibile per c ?

[0044] Nessuna cifra può essere 0 e cifre adiacenti possono essere uguali. I numeri accettabili con le cifre tutte uguali sono 9. I numeri accettabili con le ultime due cifre uguali fra loro diverse dalla prima sono ovviamente tanti quanti quelli con le prime due cifre uguali diverse dalla terza, in totale 14×2 . Facilmente si calcola che i numeri accettabili con le cifre tutte diverse fra loro sono 7.

8. Ora solare

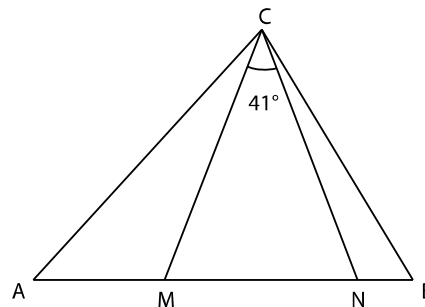
C'è una sola strada che porta dalla casa di Luigi a quella di Emma. Ogni mattina Luigi parte in auto dalla propria casa e arriva alle 9.00 a casa di Emma: lei si fa trovare pronta e lui la porta in auto a casa propria. La mattina del 28 ottobre scorso Emma si è dimenticata che nella notte era avvenuto il passaggio dall'ora legale a quella solare: si è così presentata alle 8.00 alla porta di casa e, non vedendo arrivare Luigi, si è incamminata lungo la strada andando incontro all'auto di Luigi. Dopo un certo tempo ha incontrato l'auto che la stava andando a prendere: immediatamente Luigi si è fermato e ha invertito la marcia, Emma è salita e i due sono arrivati a casa di Luigi con 12 minuti di

anticipo rispetto al solito. Luigi guida a velocità costante e non è stato perso tempo nell'operazione di invertire la marcia e di prendere a bordo Emma. Quanti minuti ha camminato Emma?

[0054] Nel viaggio di andata Luigi ha risparmiato $12/2 = 6$ minuti: ha dunque incontrato Emma alle 8.54. Essendo partita alle 8.00, in quell'istante Emma stava camminando da 54 minuti.

9. L'angolo

Nel triangolo ABC in figura i punti M e N sul lato AB sono determinati in modo che il segmento AN sia lungo quanto il segmento AC e il segmento BM sia lungo quanto il segmento BC . L'angolo MCN misura 41 gradi. Quanti gradi misura l'angolo ACB ?



[0098] Denotate rispettivamente con α e β le misure in gradi degli angoli alla base dei triangoli isosceli ANC di vertice A e BCM di vertice B , abbiamo che $\alpha + \beta + 41 = 180$ e che l'angolo cercato ACB misura, in gradi, $\alpha + \beta - 41 = 98$.

10. Il coefficiente

Svolgendo il prodotto $(1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) \dots (1 - 10x)$ e raccogliendo i termini simili si ottiene un'espressione del tipo $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Mx^{10}$. Quanto vale C ?

[1320] Nel prodotto svolto, i termini in x^2 si ottengono selezionando il termine con parte letterale x da due qualunque delle parentesi e il termine 1 dalle altre otto: occorre dunque fare questa operazione una e una sola volta in tutti i modi possibili. Osservando che per ogni coppia di fattori l'operazione dà risultato positivo, possiamo organizzarci come segue: iniziamo da $10x$, che va moltiplicato per $x, 2x, \dots, 9x$ dando come contributo al coefficiente $10(1 + 2 + \dots + 9) = 450$; poi consideriamo $9x$, ottenendo nello stesso modo $9(1 + 2 + \dots + 8) = 324$, e così via: $8(1 + 2 + \dots + 7) = 224$, $7(1 + 2 + \dots + 6) = 147$, $6(1 + 2 + \dots + 5) = 90$, $5(1 + 2 + 3 + 4) = 50$, $4(1 + 2 + 3) = 24$, $3(1 + 2) = 9$ e 2, con somma 1320.

11. Cubetti bianchi e cubetti neri

Abbiamo tanti cubetti bianchi e neri, tutti della stessa dimensione, e vogliamo comporre un parallelepipedo formato da 2013 cubetti in modo che, in ognuna delle tre direzioni ciascuna parallela ad uno spigolo, vi sia più di un cubetto e si alternino cubetti bianchi e cubetti neri. Se partiamo sistemando un cubetto nero in uno degli otto vertici del parallelepipedo, quanti dei cubetti neri saranno visibili sulla superficie esterna del parallelepipedo?

[0742] 2013 si fattorizza (in fattori primi) come $3 \times 11 \times 61$: escludendo spigoli di lunghezza 1, queste devono essere allora le lunghezze degli spigoli. Abbiamo allora due facce per ognuna delle seguenti taglie: 3×11 , 11×61 , 61×3 . Chiaramente il risultato non dipende da quale sia il vertice di partenza: poiché le lunghezze degli spigoli sono numeri dispari, in ogni vertice cadrà un cubetto nero. Le facce 11×61 ospitano $186 + 150 = 336$ cubetti neri ciascuna e non hanno cubetti in comune. A questi 672 cubetti vanno aggiunti i 60 cubetti delle due facce 61×3 (30 per ciascuna) e i 10 cubetti delle due facce 3×11 (5 per ciascuna) che non toccano le facce 11×61 .

12. Approssimazione

Sapete che $x = 1^2/1 + 2^2/3 + 3^2/5 + \dots + 10^2/19$ e $y = 1^2/3 + 2^2/5 + 3^2/7 + \dots + 10^2/21$. Qual è il numero intero più vicino a $1000(x - y)$?

[5238] Si può scrivere $x - y = 1 + (2^2 - 1^2)/3 + (3^2 - 2^2)/5 + \dots + (10^2 - 9^2)/19 - 10^2/21 = 1 + 1 \times 3/3 + 1 \times 5/5 + \dots + 1 \times 19/19 + 10^2/21 = 10 - 10^2/21 = 5,2380\dots$

13. Quest'anno al quadrato

Quanti divisori distinti, inclusi 1 e se stesso, ha il numero 2013^2 ?

[0027] I fattori primi di 2013 sono tre, ciascuno presente una sola volta. Ogni divisore è esprimibile in uno e un solo modo come prodotto dei tre fattori, ciascuno elevato a una potenza scelta fra 0, 1 e 2, e viceversa. Le scelte possibili sono dunque 3^3 .

14. Due zeri alla fine

Quanti sono i numeri tali che:

- la loro scrittura termina esattamente con due zeri (cioè sono zero le ultime due cifre, ma non la terz'ultima);
- sono esprimibili come prodotto di sette interi positivi consecutivi tutti minori di 26?

[0006] Chiaramente sequenze diverse di sette numeri consecutivi danno luogo a prodotti diversi. I numeri che cerchiamo devono essere multipli di 10^2 , ma non di 10^3 , dunque devono ammettere come fattori sia 2^2 sia 5^2 , ma non 2^3 insieme a 5^3 . Dal momento che in una sequenza di sette interi consecutivi vi sono sempre almeno tre numeri pari, occorre e basta che contenga 2 multipli di 5 e non contenga 25 per evitare la presenza del fattore 5^3 . Le sequenze ammissibili sono allora tutte e sole quelle che iniziano con uno dei seguenti sei interi: 4, 5, 9, 10, 14, 15.

15. La piramide pentagonale

La base di una piramide di vertice V è un pentagono regolare $ABCDE$ e le sue cinque facce sono triangoli equilateri. Qual è la misura in gradi dell'angolo AVC ?

[0108] I triangoli ABC e AVC sono congruenti poiché hanno in comune il lato AC e ognuno dei loro rimanenti lati ha lunghezza pari a quella del lato del pentagono. L'angolo AVC misura quindi quanto l'angolo ABC , che è uno degli angoli interni di un pentagono regolare.