Kangourou della Matematica 2012
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2012

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) Assegnati tre punti non allineati nello spazio, quante sfere passano per questi tre punti? Nel caso ne possa passare più di una, come si può determinare il raggio di quella che ha raggio minore?

S2. (*7 punti*) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura. Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce esposte sia 2012. Può riuscirci e, in caso affermativo, quanti dadi deve usare?

S3. (*11 punti*) Venti tessere sono numerate con gli interi da 1 a 20. Vogliamo colorare ogni tessera di un solo colore, bianco o nero, in modo che sia rispettata la seguente regola: se due (diverse) tessere di numeri m e n hanno lo stesso colore e $m + n < 21$, allora anche la tessera di numero $m + n$ deve avere quel colore. In quanti modi diversi possiamo attribuire i colori?

S4. (*14 punti*) Dimostra che ogni poliedro (solido la cui superficie è costituita da un numero finito di poligoni) ha almeno due facce che hanno lo stesso numero di spigoli. Esistono poliedri che non hanno tre facce con lo stesso numero di spigoli?

S5. (*18 punti*) Dimostrare che, comunque siano assegnati n (≥ 1) numeri interi positivi, è sempre possibile sceglierne alcuni in modo che la loro somma sia un multiplo di n.

S6. (*22 punti*) Denotiamo con **N** l'insieme degli interi positivi. È noto che l'insieme dei sottoinsiemi di **N** non può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**, ma può essere messo in corrispondenza biunivoca con qualsiasi intervallo (non banale) dell'asse reale. Diciamo che due sottoinsiemi infiniti di **N** sono "quasi-disgiunti" se hanno in comune al più un numero finito di elementi. Provare che esiste un insieme infinito che non può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**, i cui elementi sono sottoinsiemi di **N** a due a due quasi-disgiunti.

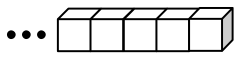
LIVELLO STUDENT

Per ciascun quesito, riporta la soluzione insieme ad una breve giustificazione nello spazio disponibile (se necessario, puoi utilizzare anche il retro del foglio).

S1. (*5 punti*) Assegnati tre punti non allineati nello spazio, quante sfere passano per questi tre punti? Nel caso ne passi più di una, come si può determinare il raggio di quella che ha raggio minore?

Soluzione: infinite. È il raggio della circonferenza per i tre punti.
Ricordiamo che l'insieme dei punti che hanno ugual distanza da un punto fissato nello spazio è la sfera, nel piano è la circonferenza.
Osserviamo che per tre punti A, B, C passa uno ed un sol piano Π e una ed una sola circonferenza, giacente su tale piano, il cui centro O è l'intersezione degli assi dei segmenti AB e BC in quanto per tale punto risulta $OA = OB = OC$ (infatti l'asse di un segmento è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza dai suoi due estremi). Consideriamo la retta passante per O e perpendicolare al piano Π: per il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli OPA, OPB, OPC, ogni suo punto P ha uguale distanza da A, B, C e quindi è il centro di una sfera passante per i tre punti.
Il raggio PA di tale sfera è minimo quando l'ipotenusa PA del triangolo OPA coincide con il cateto OA.

S2. (*7 punti*) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura.



Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce esposte sia 2012. Può riuscirci e, in caso affermativo, quanti dadi deve usare?

Soluzione: non può riuscirci.
Le facce laterali contribuiscono per ogni dado con 14 punti e in più i due dadi estremi contribuiscono con la somma dei punti sulle due facce terminali, una per ciascun dado. Poiché si incollano facce con lo stesso punteggio, se il numero di dadi è dispari (e quindi il numero di incollature è pari) le due facce estreme avranno punteggi a somma 7, se il numero di dadi è pari (e quindi il numero di incollature è dispari) le due facce estreme avranno lo stesso punteggio e quindi contribuiranno con $2n$ punti (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6). Poiché dividendo 2012 per 14 si ha quoziente 143 (e resto 10), la somma 2012 non può essere ottenuta.

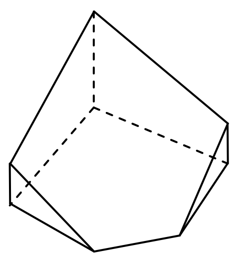
S3. (*11 punti*) Venti tessere sono numerate con gli interi da 1 a 20. Vogliamo colorare ogni tessera di un solo colore, bianco o nero, in modo che sia rispettata la seguente regola: se due (diverse) tessere di numeri m e n hanno lo stesso colore e $m + n < 21$, allora anche la tessera di numero $m + n$ deve avere quel colore. In quanti modi diversi possiamo attribuire i colori?

Soluzione: 6.
Vediamo come le differenti condizioni di partenza condizionino la sequenza.
Se le tessere denotate con 1 o 2 hanno lo stesso colore, tutte le altre devono avere quel colore.
Se la seconda tessera ha colore diverso dalla prima e dalla terza, essa è l'unica ad avere quel colore poiché ogni altra tessera si ottiene dalla precedente (che ha il colore di 1) aggiungendo 1.
Se la prima tessera ha colore diverso dalla seconda e dalla terza, essa è l'unica ad avere quel colore poiché la tessera denotata con 4 deve avere lo stesso colore di quelle denotate con 2 e 3 (altrimenti la $5 = 1 + 4 = 2 + 3$ dovrebbe avere lo stesso colore della 1 e della 2) e ogni tessera si può ottenere aggiungendo 2 alla pari precedente se pari, alla dispari precedente se dispari.
In totale, tenendo conto delle due colorazioni, si hanno sei casi possibili.

S4. (*14 punti*) Dimostra che ogni poliedro (solido la cui superficie è costituita da un numero finito di poligoni) ha almeno due facce che hanno lo stesso numero di spigoli. Esistono poliedri che non hanno (almeno) tre facce con lo stesso numero di spigoli?

Soluzione: la dimostrazione segue; la risposta è affermativa.
Supponiamo che nel poliedro non ci siano facce con più di N spigoli: se tutte avessero un numero diverso di spigoli ne esisterebbero una sola con N spigoli, una sola con $N - 1$ spigoli, …, una sola con 3 spigoli, cioè esisterebbero solo $N - 4$ facce con un numero non massimo di spigoli mentre alla faccia con N spigoli devono potersi "attaccare" N facce.

Esistono poliedri che non hanno tre facce con lo stesso numero di spigoli, ad esempio quello con 6 facce di cui due con 5 spigoli, due con 4 spigoli, due con 3 spigoli.



S5. (*18 punti*) Dimostra che, comunque siano assegnati n (≥ 1) numeri interi positivi, è sempre possibile sceglierne alcuni in modo che la loro somma sia un multiplo di n.

Soluzione

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ gli interi assegnati e si considerino gli n interi

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \; b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Se nessuno di questi ultimi è multiplo di n, almeno due di essi, diciamo b_i e b_j con $i < j$, divisi per n devono dare lo stesso resto. Allora $b_j - b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ è divisibile per n.

S6. (*22 punti*) Denotiamo con **N** l'insieme degli interi positivi. È noto che l'insieme dei sottoinsiemi di **N** non può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**, ma può essere messo in corrispondenza biunivoca con qualsiasi intervallo (non banale) dell'asse reale. Diciamo che due sottoinsiemi infiniti di **N** sono "quasi-disgiunti" se hanno in comune al più un numero finito di elementi.

Dimostra che esiste un insieme infinito che non può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**, i cui elementi sono sottoinsiemi di **N** a due a due quasi-disgiunti.

Soluzione: Nel piano dotato di un sistema cartesiano ortogonale operiamo la quadrettatura i cui nodi sono tutti e soli i punti a coordinate intere. Instauriamo una corrispondenza biunivoca fra **N** e l'insieme dei quadretti ottenuti (per esempio numerandoli "a spirale" con partenza dal quadretto del primo quadrante che ha un vertice nell'origine). Ad ogni semiretta uscente dall'origine associamo il sottoinsieme di **N** costituito dai numeri attribuiti ai quadretti che la semiretta interseca: comunque si scelgano due diverse semirette, i quadretti intersecati da entrambe sono in numero finito (eventualmente 0), per cui i sottoinsiemi di **N** associati alle due semirette avranno in comune al più un numero finito di elementi. L'insieme delle semirette uscenti dall'origine, ognuna individuata dall'angolo (misurato in radianti) che essa forma con la direzione positiva dell'asse orizzontale, può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0, 2\pi)$: questo intervallo non può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**.