Kangourou della Matematica 2011
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 7 maggio 2011

Quesiti

1. Un lungo viaggio

Quando a Londra sono le 17.00, a S. Francisco sono le 09.00 (dello stesso giorno). Un volo diretto Londra – S. Francisco dura 12 ore e mezza. Un aereo parte da Londra alle 13.05 per un volo diretto; che ora sarà a S. Francisco quando l’aereo arriverà? (Scrivete le quattro cifre dell'ora senza il punto, ad es. 1011 per 10.11.)

2. Che errore!

Alfredo, un giardiniere molto disattento, è incaricato di tappezzare di erba un appezzamento di terreno di cui possiede la mappa in scala 1 : n. Calcola l’area della sua immagine sulla mappa, la moltiplica per n e compra le zolle d’erba che consentono di tappezzare un appezzamento di area uguale al risultato ottenuto, spendendo 14 euro. Una volta sul posto, si rende naturalmente conto che gli servono molte altre zolle d’erba: le va a comprare, ma nel frattempo il prezzo è salito del 6% e lui spende 42 euro in più di quanto avrebbe speso se le avesse comperate insieme alle prime. Quanto vale n?

3. Tre quadrati

All’interno di un rettangolo sono stati collocati 3 quadrati disposti come in figura. Di alcuni degli angoli formati dai vari lati presenti sono indicate le misure in gradi (la figura è puramente indicativa, non rispetta esattamente le misure dichiarate). Quanto vale la misura in gradi indicata con X?

4. Carlo e Gigi

A Carlo e Gigi sono stati assegnati alcuni problemi di Matematica come compiti delle vacanze. Il numero dei problemi assegnati a Carlo è il quadruplo del numero dei problemi assegnati a Gigi. Quando si ritrovano dopo le vacanze, scoprono di avere risolto lo stesso numero di problemi, ma la percentuale dei problemi risolti da Carlo è uguale alla percentuale dei problemi non risolti da Gigi. Qual è la percentuale dei problemi risolti da Gigi?

5. Io e mia cugina

Nella via dove abitiamo sia io sia mia cugina vi sono 17 case. Le case sul lato sinistro sono numerate utilizzando progressivamente tutti i numeri dispari da 1 in poi, quelle sul lato destro sono numerate utilizzando progressivamente tutti i numeri pari da 2 in poi. La mia casa è l’ultima del lato destro e porta il numero 12, quella di mia cugina è l’ultima del lato sinistro. Qual è il numero civico di mia cugina?

6. Guarda il cubo

Un cubo di 11 cm di lato è ottenuto accostando cubetti di 1 cm di lato. Qual è il massimo numero di questi cubetti che possono essere visti simultaneamente da una sola persona?

7. Sommiamo le cifre

Quanti numeri interi positivi, scritti in notazione decimale, sono 20 volte la somma delle loro cifre? (Scrivete [9999] se ritenete che ce se siano infiniti.)

8. Quanti addendi!

Quanto vale la somma $5 + 10 + 15 + \ldots + 295 + 300$?

9. Un lungo trattato

Un trattato è formato da quattro parti. I suoi articoli sono numerati nella prima parte da 1.1 a 1.59, nella seconda da 2.1 a 2.54, nella terza da 3.1 a 3.342 e nella quarta da 4.1 a 4.10. Quante cifre sono state scritte in totale per numerare tutti questi articoli?

10. Due progressioni

Considerate gli insiemi di numeri interi positivi $A = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ (progressione aritmetica di ragione 3 con partenza da 0) e $B = \{0, 13, 26, 39, \ldots\}$ (progressione aritmetica di ragione 13 con partenza da 0). Considerate ora l'insieme $A \cup B$ e ordinate i suoi elementi in ordine crescente (sia cioè $A \cup B = \{0, 3, 6, 9, 12, 13, 15, \ldots\}$. Quale numero occupa in $A \cup B$ il posto 2009?

11. Risultati interi

Sono assegnati 10 numeri positivi. L'unica informazione che abbiamo su di essi è che almeno uno di essi non è intero. Se vengono sommati a coppie in tutti i modi possibili (cioè se ne vengono scelti due diversi tra loro in tutti i modi possibili e vengono sommati) qual è il massimo numero di risultati interi tutti diversi fra loro che è possibile vengano realizzati?

12. Il ciclista e il podista

La casa di Stefano dista 60 km da quella di Andrea. Ogni sabato Stefano, appassionato ciclista, va a trovare Andrea in bicicletta, partendo a mezzogiorno, pedalando a velocità costante e impiegando due ore. Oggi però Andrea, che è un buon camminatore, non ha tempo di aspettarlo: decide quindi di andargli incontro a piedi partendo anch'egli a mezzogiorno. Anche la velocità di Andrea è costante ed è di 6 km orari. A che ora si incontreranno? (Scrivete l'ora usando le cifre di un orologio digitale senza altri segni, ad esempio scrivete 1539 per indicare le 3 e 39 di pomeriggio.)

13. Il torneo

In un torneo di palla a volo (dove le partite non possono terminare in pareggio), ogni squadra ha giocato due volte (andata e ritorno) contro ciascuna delle altre. Il 20 % delle squadre non hanno vinto alcuna partita. Quante partite si sono giocate in totale in quel torneo?

14. Numeri cancellati

I numeri interi da 1 a 2011 inclusi sono scritti nell'ordine: 1, 2, … , 2011. Vengono poi cancellati, nell'ordine, il secondo, il quarto, il sesto e così via. Quindi, dei numeri rimasti, vengono cancellati nell'ordine, il terzo, il sesto, il nono e così via. Dei numeri rimasti, vengono ora cancellati nell'ordine il quarto, l'ottavo, il dodicesimo e così via. Si prosegue con questo criterio, sempre aumentando di un'unità, sui numeri rimasti, il passo di cancellazione. È stato appena cancellato il numero 1997: quanti numeri rimangono scritti?

15. I libri di Elisabetta

Ad Elisabetta piace leggere, per cui al suo compleanno le sono stati regalati dei libri. I generi dei libri che ha ricevuto sono: romanzo, poesia, scienza. 3 dei libri non sono romanzi, 4 non sono libri di poesia, 5 non sono libri scientifici. Quanti libri ha ricevuto in regalo Elisabetta?

Kangourou della Matematica 2011
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 7 maggio 2011

Quesiti e soluzioni

1. **Un lungo viaggio**

Quando a Londra sono le 17.00, a S. Francisco sono le 09.00 (dello stesso giorno). Un volo diretto Londra – S. Francisco dura 12 ore e mezza. Un aereo parte da Londra alle 13.05 per un volo diretto; che ora sarà a S. Francisco quando l'aereo arriverà? (Scrivete le quattro cifre dell'ora senza il punto, ad es. 1011 per 10.11.)

[1735] Quando l'aereo parte da Londra, a S. Francisco sono le 05.05: 12 ore e mezza dopo sono le 17.35.

2. **Che errore!**

Alfredo, un giardiniere molto disattento, è incaricato di tappezzare di erba un appezzamento di terreno di cui possiede la mappa in scala 1 : *n*. Calcola l'area della sua immagine sulla mappa, la moltiplica per *n* e compra le zolle d'erba che consentono di tappezzare un appezzamento di area uguale al risultato ottenuto, spendendo 14 euro. Una volta sul posto, si rende naturalmente conto che gli servono molte altre zolle d'erba: le va a comprare, ma nel frattempo il prezzo è salito del 6% e lui spende 42 euro in più di quanto avrebbe speso se le avesse comperate insieme alle prime. Quanto vale *n*?

[0051] 42 è il 6% di 700: se le zolle d'erba fossero state comprate tutte la prima volta, la spesa sarebbe stata dunque di 714 euro. La spesa è proporzionale all'area. Per calcolare correttamente l'area del terreno partendo dalla mappa, il giardiniere avrebbe dovuto moltiplicare l'area dell'immagine sulla mappa per n^2 e non solo per *n*. Il rapporto 714 : 14 fornisce quindi il valore di *n*.

3. **Tre quadrati**

All'interno di un rettangolo sono stati collocati 3 quadrati disposti come in figura. Di alcuni degli angoli formati dai vari lati presenti sono indicate le misure in gradi (la figura è puramente indicativa, non rispetta esattamente le misure dichiarate). Quanto vale la misura in gradi indicata con X?

[0041] È sufficiente valutare, per ognuno dei lati "inferiori" (quali appaiono in figura) dei quadrati, il minore degli angoli che esso forma con la verticale passante per i suoi estremi. Ricordando che angoli alterni interni hanno la stessa misura, si ha la seguente sequenza di misure (in gradi): 30, 60, 64, 26, 49, 41.

4. **Carlo e Gigi**

A Carlo e Gigi sono stati assegnati alcuni problemi di Matematica come compiti delle vacanze. Il numero dei problemi assegnati a Carlo è il quadruplo del numero dei problemi assegnati a Gigi. Quando si ritrovano dopo le vacanze, scoprono di avere risolto lo stesso numero di problemi, ma la percentuale dei problemi risolti da Carlo è uguale alla percentuale dei problemi non risolti da Gigi. Qual è la percentuale dei problemi risolti da Gigi?

[0080] Siano C e C_R rispettivamente il numero dei problemi assegnati a Carlo e il numero dei problemi da lui risolti , e sia G_N il numero dei problemi non risolti da Gigi. Da $C_R/C = 4G_N/C$ segue subito $C_R = 4G_N$. D'altra parte, $C_R + G_N = 5G_N$ è il numero totale di problemi assegnati a Gigi, che dunque non ha risolto il 20% dei problemi che gli competevano.

5. Io e mia cugina

Nella via dove abitiamo sia io sia mia cugina vi sono 17 case. Le case sul lato sinistro sono numerate utilizzando progressivamente tutti i numeri dispari da 1 in poi, quelle sul lato destro sono numerate utilizzando progressivamente tutti i numeri pari da 2 in poi. La mia casa è l'ultima del lato destro e porta il numero 12, quella di mia cugina è l'ultima del lato sinistro. Qual è il numero civico di mia cugina?

[0021] Sul lato destro vi sono 12 : 2 = 6 case, dunque sul lato sinistro devono essercene 11. L'ultimo dei primi 11 interi dispari è 21.

6. Guarda il cubo

Un cubo di 11 cm di lato è ottenuto accostando cubetti di 1 cm di lato. Qual è il massimo numero di questi cubetti che possono essere visti simultaneamente da una sola persona?

[0331] Una persona può vedere simultaneamente al più tre facce e ne può vedere tre se e solo se le tre facce hanno un vertice del cubo in comune. Consideriamo una tale terna di facce. Ogni faccia mostra 11×11 cubetti. In corrispondenza ad ogni spigolo comune a due facce vi sono 10 cubetti comuni solo a queste due facce e 1 comune a tutte e tre. Si ha $11\times11\times3 - (30 + 2) = 331$.

7. Sommiamo le cifre

Quanti numeri interi positivi, scritti in notazione decimale, sono 20 volte la somma delle loro cifre? (Scrivete [9999] se ritenete che ce se siano infiniti.)

[0001] Un numero del genere (se esiste) deve avere come ultima cifra 0: è chiaro allora che deve avere più di due cifre. D'altra parte non può averne più di tre: si vede facilmente che ogni numero di n cifre con $n \geq 4$ è maggiore di $20\times(n-1)\times9$. Se a e b sono due cifre diverse da zero, la condizione $100a + 10b = 20(a + b)$ equivalente a $80a = 10b$ è soddisfatta se e solo se $a = 1$ e $b = 8$.

8. Quanti addendi!

Quanto vale la somma $5 + 10 + 15 + \ldots + 295 + 300$?

[9150] La somma richiesta coincide con $5\times(1 + 2 + 3 + \ldots + 59 + 60)$. La somma dei primi 60 interi positivi vale $61\times60/2$.

9. Un lungo trattato

Un trattato è formato da quattro parti. I suoi articoli sono numerati nella prima parte da 1.1 a 1.59, nella seconda da 2.1 a 2.54, nella terza da 3.1 a 3.342 e nella quarta da 4.1 a 4.10. Quante cifre sono state scritte in totale per numerare tutti questi articoli?

[1602] Occorrono:
$59 + 9 + 2\times50 = 168$ cifre per numerare gli articoli della prima parte;
$54 + 9 + 2\times45 = 153$ cifre per numerare gli articoli della seconda parte;
$342 + 9 + 2\times90 + 3\times243 = 1260$ cifre per numerare gli articoli della terza parte;
$10 + 9 + 2\times1 = 21$ cifre per numerare gli articoli della terza parte.

10. Due progressioni

Considerate gli insiemi di numeri interi positivi $A = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ (progressione aritmetica di ragione 3 con partenza da 0) e $B = \{0, 13, 26, 39, \ldots\}$ (progressione aritmetica di ragione 13 con partenza da 0). Considerate ora l'insieme $A \cup B$ e ordinate i suoi elementi in ordine crescente (sia cioè $A \cup B = \{0, 3, 6, 9, 12, 13, 15, \ldots\}$. Quale numero occupa in $A \cup B$ il posto 2009?

[5220] 3 e 13 sono numeri primi (fra loro): allora ogni numero che sia multiplo intero di entrambi deve essere multiplo del loro prodotto, cioè di 39. Per ogni intero non negativo n, in $A \cup B$ fra $39\times n$ incluso e $39\times(n + 1)$ escluso vi sono $13 + 2 = 15$ numeri. Si ha $2009 = 133\times15 + 14$. Il 14-mo numero di $A \cup B$ è 33. Il numero cercato è allora $133\times39 + 33$.

11. Risultati interi

Sono assegnati 10 numeri positivi. L'unica informazione che abbiamo su di essi è che almeno uno di essi non è intero. Se vengono sommati a coppie in tutti i modi possibili (cioè se ne vengono scelti due diversi tra loro in tutti i modi possibili e vengono sommati) qual è il massimo numero di risultati interi tutti diversi fra loro che è possibile vengano realizzati?

[0045] Il massimo numero di risultati interi non può evidentemente superare il numero delle possibili coppie (non ordinate: la somma gode della proprietà commutativa) di numeri disponibili, cioè 45. È effettivamente possibile ottenere 45 risultati interi tutti diversi fra loro con coppie di addendi non interi: ad esempio il primo numero disponibile sia 1/2, il secondo sia 3/2, il terzo sia 1/2 più la somma dei primi 2, l'ennesimo sia 1/2 più la somma dei due precedenti.

12. Il ciclista e il podista

La casa di Stefano dista 60 km da quella di Andrea. Ogni sabato Stefano, appassionato ciclista, va a trovare Andrea in bicicletta, partendo a mezzogiorno, pedalando a velocità costante e impiegando due ore. Oggi però Andrea, che è un buon camminatore, non ha tempo di aspettarlo: decide quindi di andargli incontro a piedi partendo anch'egli a mezzogiorno. Anche la velocità di Andrea è costante ed è di 6 km orari. A che ora si incontreranno? (Scrivete l'ora usando le cifre di un orologio digitale senza altri segni, ad esempio scrivete 1539 per indicare le 3 e 39 di pomeriggio.)

[1340] Stefano viaggia a 1/2 km/minuto, Andrea viaggia a 1/10 km/minuto. Allora in un minuto Stefano e Andrea si avvicinano di 6/10 km. Si ha $60 : (6/10) = 100$.

13. Il torneo

In un torneo di palla a volo (dove le partite non possono terminare in pareggio), ogni squadra ha giocato due volte (andata e ritorno) contro ciascuna delle altre. Il 20 % delle squadre non hanno vinto alcuna partita. Quante partite si sono giocate in totale in quel torneo?

[0020] Al più una squadra può avere perso tutte le partite. 1 è il 20% di 5. 5 squadre hanno giocato complessivamente 5×4 = 20 partite.

14. Numeri cancellati

I numeri interi da 1 a 2011 inclusi sono scritti nell'ordine: 1, 2, … , 2011. Vengono poi cancellati, nell'ordine, il secondo, il quarto, il sesto e così via. Quindi, dei numeri rimasti, vengono cancellati nell'ordine, il terzo, il sesto, il nono e così via. Dei numeri rimasti, vengono ora cancellati nell'ordine il quarto, l'ottavo, il dodicesimo e così via. Si prosegue con questo criterio, sempre aumentando di un'unità, sui numeri rimasti, il passo di cancellazione. È stato appena cancellato il numero 1997: quanti numeri rimangono scritti?

[0673] Dopo il primo turno di cancellazioni rimangono solo i primi 1006 numeri dispari dei quali 1997 è l'8-ultimo: occupa allora la posizione 999, numero divisibile per 3, e dunque viene cancellato nel corso del secondo turno di cancellazioni. Appena cancellato 1997 rimangono dunque 1006 – 999/3 numeri.

15. I libri di Elisabetta

Ad Elisabetta piace leggere, per cui al suo compleanno le sono stati regalati dei libri. I generi dei libri che ha ricevuto sono: romanzo, poesia, scienza. 3 dei libri non sono romanzi, 4 non sono libri di poesia, 5 non sono libri scientifici. Quanti libri ha ricevuto in regalo Elisabetta?

[0006] Nella somma 3 + 4 + 5 = 12 ogni libro regalato viene contato esattamente due volte.