Kangourou della Matematica 2011
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2011

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Alla finale di Mirabilandia per ognuna delle cinque categorie vengono proposti sei problemi, uno per ciascuno dei seguenti punteggi: 5, 7, 11, 14, 18 e 22. Naturalmente in ogni singola categoria i sei problemi devono essere tutti diversi fra loro, ma uno stesso problema può essere assegnato in più di una categoria. Tieni però presente che, se un problema fornisce un certo punteggio in una categoria e compare anche in una categoria superiore, in quest'ultima deve fornire un punteggio inferiore.
Il comitato organizzatore vuole preparare il minore numero possibile di problemi. Qual è questo numero?

C2. (*7 punti*) Immagina una lista in cui compaiano in ordine crescente tutti i numeri interi positivi la somma delle cui cifre è divisibile per 5 (la lista inizierà dunque così: 5, 14, 19, 23,…). Qual è la minima differenza possibile fra un numero e quello che lo precede in questa lista?

C3. (*11 punti*) Un cilindro circolare retto ha le basi di raggio 1 cm e l'altezza misura 4 cm. I punti P e Q, rispettivamente sulla base inferiore e sulla base superiore, stanno sulla stessa generatrice (si chiama "generatrice" ogni retta perpendicolare alle basi che interseca la superficie laterale del cilindro). Un filo ha un capo in P e l'altro in Q e incontra almeno una volta ogni generatrice. Qual è la minima lunghezza possibile del filo?

C4. (*14 punti*) Ada, Bruna e Carla saltano ciascuna sul proprio jumper la cui base è praticamente un punto. Ognuna di loro compie salti sempre della stessa lunghezza; le lunghezze sono rispettivamente 70, 80, e 85 cm. Seguono tutte, partendo da uno stesso punto e muovendosi nello stesso verso, uno stesso circuito circolare lungo 400 metri, che è attraversato da una fossato largo 73 cm. Accade che solo una di loro riesce a fare 2 giri completi del circuito senza cadere nel fossato: chi e perché? (Le lunghezze dei salti e la larghezza del fossato si intendono misurate su archi del circuito, non su corde.)

C5. (*18 punti*) Hai una griglia 7×7. Vuoi inserire in ogni casella una e una sola delle lettere A, B, C in modo che:

- in ogni riga il numero delle caselle con la lettera A sia non minore del numero delle caselle con la lettera B e del numero delle caselle con la lettera C;
- in ogni colonna il numero delle caselle con la lettera B sia non minore del numero delle caselle con la lettera A e del numero delle caselle con la lettera C.

Mostra che puoi raggiungere lo scopo in diversi modi, ma che il numero delle caselle con la lettera C è sempre lo stesso. Qual è? Perché?

C6. (*22 punti*) Vi sono diversi modi di ripartire un quadrato di lato 1 in 4 triangoli ciascuno di area $\frac{1}{4}$ (per "ripartire" si intende scomporre senza sovrapposizioni se non, eventualmente, di lati). Al variare dei modi, può variare la somma dei perimetri dei triangoli. Quanti sono i possibili diversi valori che questa somma può assumere? Giustifica la risposta nel modo più esauriente possibile.

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Alla finale di Mirabilandia per ognuna delle cinque categorie vengono proposti sei problemi, uno per ciascuno dei seguenti punteggi: 5, 7, 11, 14, 18 e 22. Naturalmente in ogni singola categoria i sei problemi devono essere tutti diversi fra loro, ma uno stesso problema può essere assegnato in più di una categoria. Tieni però presente che, se un problema fornisce un certo punteggio in una categoria e compare anche in una categoria superiore, in quest'ultima deve fornire un punteggio inferiore.
Il comitato organizzatore vuole preparare il minore numero possibile di problemi. Qual è questo numero?

Soluzione: 10.
È chiaro che la soluzione più "economica" consiste nel far "slittare" i problemi passando da una categoria a quella immediatamente superiore, nel modo seguente.
Si preparano i 6 problemi della categoria Écolier. Per la Benjmin si elimina il primo della Écolier (che non può essere riutilizzato in alcun modo), si riutilizzano quelli dal secondo al sesto come problemi dal primo al quinto (mantenendo l'ordine) e si crea il sesto (che è il settimo preparato). Per le successive categorie si procede con lo stesso criterio.

C2. (*7 punti*)
Immagina una lista in cui compaiano in ordine crescente tutti i numeri interi positivi la somma delle cui cifre è divisibile per 5 (la lista inizierà dunque così: 5, 14, 19, 23,…). Qual è la minima differenza possibile fra un numero e quello che lo precede in questa lista?

Soluzione: 1.
È sufficiente considerare per esempio i numeri 49999 e 50000.

C3. (*11 punti*)
Un cilindro circolare retto ha le basi di raggio 1 cm e l'altezza misura 4 cm. I punti P e Q, rispettivamente sulla base inferiore e sulla base superiore, stanno sulla stessa generatrice (si chiama "generatrice" ogni retta perpendicolare alle basi che interseca la superficie laterale del cilindro). Un filo ha un capo in P e l'altro in Q e incontra almeno una volta ogni generatrice. Qual è la minima lunghezza possibile del filo?

Soluzione: $2\sqrt{\pi^2 + 4}$.
Tagliando il cilindro lungo la generatrice passante per P e Q e sviluppandone la superficie laterale, si ottiene un rettangolo di base 2π cm e altezza 4 cm sul quale P e Q hanno come immagine due vertici opposti. La diagonale di questo rettangolo passante per questi due vertici è chiaramente la traccia del filo di minima lunghezza disposto sulla superficie laterale del cilindro che incontra almeno una volta ogni generatrice.

C4. (*14 punti*) Ada, Bruna e Carla saltano ciascuna sul proprio jumper la cui base è praticamente un punto. Ognuna di loro compie salti sempre della stessa lunghezza; le lunghezze sono rispettivamente 70, 80, e 85 cm. Seguono tutte, partendo da uno stesso punto e muovendosi nello stesso verso, uno stesso circuito circolare lungo 400 metri, che è attraversato da una fossato largo 73 cm. Accade che solo una di loro riesce a fare 2 giri completi del circuito senza cadere nel fossato: chi e perché? (Le lunghezze dei salti e la larghezza del fossato si intendono misurate su archi del circuito, non su corde.)

Soluzione: Bruna.
Il salto di Ada è più corto della larghezza del fossato, quindi non potrà mai saltarlo.
Carla dopo 470 salti è a 50 cm dalla conclusione del primo giro e quindi nel secondo giro ad ogni salto atterra 50 cm prima di dove è atterrata nel primo giro. Se nel primo giro riesce a superare il fossato, dopo averlo superato atterra a non più di 12 cm dal bordo: al secondo giro quindi cade certamente dentro il fossato.
Bruna invece, poiché 40000 è un multiplo intero di 80, dopo 500 salti tornerà al punto di partenza e nei giri successivi atterrerà esattamente negli stessi punti in cui è atterrata durante il primo giro: o cade nel fossato al primo giro o non vi cade più.

C5. (*18 punti*) Hai una griglia 7×7. Vuoi inserire in ogni casella una e una sola delle lettere *A*, *B*, *C* in modo che:

- in ogni riga il numero delle caselle con la lettera *A* sia non minore del numero delle caselle con la lettera *B* e del numero delle caselle con la lettera *C*;
- in ogni colonna il numero delle caselle con la lettera *B* sia non minore del numero delle caselle con la lettera *A* e del numero delle caselle con la lettera *C*.

Mostra che puoi raggiungere lo scopo in diversi modi, ma che il numero delle caselle con la lettera *C* è sempre lo stesso. Qual è? Perché?

Soluzione: 7.
Una possibile soluzione è quella a fianco.

C	A	A	A	B	B	B
A	C	A	A	B	B	B
A	A	C	A	B	B	B
B	B	B	C	A	A	A
A	B	B	B	C	A	A
B	B	A	B	A	C	A
B	A	B	B	A	A	C

Ogni permutazione delle righe e/o delle colonne fornisce una soluzione. È ovvio che in ogni riga devono esserci almeno 3 A: infatti con un numero inferiore di A dovrebbero esserci almeno 3 B o 3 C. Per lo stesso motivo in ogni colonna devono esserci almeno 3 B. Allora complessivamente devono esserci al più 49 – 2×21 = 7 C. Se le C fossero in numero inferiore a 7, almeno uno dei due insiemi di lettere, quello delle A o quello delle B, dovrebbe avere almeno 22 elementi: supponiamo sia quello delle A. Allora in almeno una delle 7 colonne dovrebbero essere presenti almeno 4 lettere A, quindi in almeno una colonna le A sarebbero più delle B: impossibile. Ragionando simmetricamente sull'insieme delle B e sulle 7 righe si vede che non possono esistere più di 21 lettere B e quindi che le C sono sempre in numero di 7.

C6. (*22 punti*) Vi sono diversi modi di ripartire un quadrato di lato 1 in 4 triangoli ciascuno di area $\frac{1}{4}$ (per "ripartire" si intende scomporre senza sovrapposizioni se non, eventualmente, di lati). Al variare dei modi, può variare la somma dei perimetri dei triangoli. Quanti sono i possibili diversi valori che questa somma può assumere? Giustifica la risposta nel modo più esauriente possibile.

Soluzione: 5.

È ovvio che qualcuno dei 4 triangoli deve avere almeno un lato "base" b contenuto in un lato del quadrato. La base b può solo

- coincidere con il lato del quadrato (in tal caso il triangolo di base b ha altezza $\frac{1}{2}$);
- essere lunga $\frac{1}{2}$ e avere un vertice coincidente con un vertice del quadrato (in tal caso il triangolo di base b ha altezza 1).

Infatti se la misura di b fosse minore di $\frac{1}{2}$, l'area del triangolo (che può avere altezza al più 1) sarebbe minore di $\frac{1}{4}$; se fosse strettamente compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1 o se fosse uguale a $\frac{1}{2}$, ma nessun estremo di b coincidesse con un vertice del quadrato, sul lato del quadrato su cui giace b resterebbero segmenti di lunghezza minore di $\frac{1}{2}$ cui non potrebbero corrispondere triangoli di area $\frac{1}{4}$.

È poi chiaro che non ci possono essere più di due lati del quadrato che contengano "basi" di lunghezza $\frac{1}{2}$ (darebbero luogo a più di 4 triangoli di area $\frac{1}{4}$); quindi, a meno di rotazioni e di simmetrie assiali, si possono presentare solo le seguenti configurazioni.

a) Il punto medio di nessun lato del quadrato è vertice di un triangolo di area $\frac{1}{4}$.

Somma dei perimetri $4+4\sqrt{2}$.

b) Il punto medio di un solo lato del quadrato è vertice di un triangolo di area $\frac{1}{4}$.

Somma dei perimetri: nel primo caso $4+3\sqrt{2}+\sqrt{5}$, nel secondo $4+2\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Infatti P deve essere il punto medio di AQ, per cui i triangoli APB e QBP (di area $\frac{1}{4}$) hanno altezza comune HB lunga $2 \bullet \dfrac{1}{4} : \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Facili conti (teorema di Pitagora) forniscono che BP è lungo $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

c) I punti medi di due lati opposti del quadrato sono vertici di triangoli di area $\frac{1}{4}$.

Somma dei perimetri: nei primi due casi $6+2\sqrt{5}$, nel terzo $4+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

d) I punti medi di due lati consecutivi del quadrato sono vertici di triangoli di area $\frac{1}{4}$.

Somma dei perimetri: $4+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$, come nell'ultimo caso precedente.