Kangourou della Matematica 2010
Coppa a squadre Kangourou - finale
Mirabilandia, 9 maggio 2010

Quesiti

1. Da casa a scuola

Da casa mia a scuola vado sempre a piedi, partendo sempre alla stessa ora. Se cammino alla velocità di 4 Km/h, arrivo con un ritardo di 5 minuti sull'inizio delle lezioni, se invece cammino alla velocità di 5 Km/h, arrivo 10 minuti prima dell'inizio delle lezioni. Quanti metri dista la scuola dalla mia casa?

2. Un'equazione con molte incognite

Chiamiamo "septina" un insieme ordinato di 7 numeri: due septine sono uguali se e solo se hanno numeri uguali nelle posizioni corrispondenti, cioè se sono uguali i loro due primi numeri, i loro secondi due e così via fino ai loro settimi due. Quante diverse septine di numeri interi relativi (a, b, c, d, e, f, g) sono tali che $2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 9$?

3. Questo è un anno particolare

L'anno 2010 ha la curiosa peculiarità che il numero formato dalle sue prime due cifre è un multiplo di quello formato dalle ultime due. La stessa cosa succede ad esempio per l'anno 2404. Quanti dei prossimi 400 anni, cioè degli anni dal 2011 al 2410 inclusi, avranno questa proprietà?

4. La scacchiera

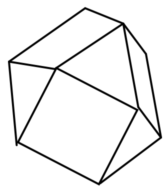
In una ordinaria scacchiera 8 × 8 (32 caselle bianche e 32 caselle nere alternate in orizzontale e in verticale), chiamiamo "*cammino a zig-zag*" un insieme di 8 caselle bianche, una per ogni riga, tali che, per ogni riga dalla seconda all'ottava, la casella che sta in tale riga abbia in comune un vertice con quella che sta nella riga precedente. Quanti diversi cammini a zig-zag si possono trovare?

5. Facce e vertici

Su ogni faccia di un cubo abbiamo scritto un numero intero strettamente positivo. Su ogni vertice abbiamo scritto il prodotto dei 3 numeri scritti sulle facce che concorrono in quel vertice. La somma dei numeri scritti nei vertici è 70. Qual è la somma dei numeri scritti sulle facce?

6. Il cubottaedro

Abbiamo un cubo di 6 centimetri di lato. Fissato un vertice, consideriamo il piano che passa per i punti di mezzo di ciascuno dei tre spigoli che vi concorrono: questo piano seziona il cubo in due solidi, di cui uno è una piramide con vertice nello spigolo in questione. Per ogni vertice del cubo, eliminiamo la piramide ottenuta in questo modo: rimane un solido convesso con facce che sono quadrati o triangoli (detto cubottaedro). Quanti centimetri cubi misura il suo volume?



7. Tre lampadine

Tre lampadine intermittenti si accendono una ogni due minuti, un'altra ogni due minuti e mezzo e la terza ogni tre minuti. Ognuna delle tre, quando si accende, rimane accesa per un minuto e mezzo. Nell'istante in cui il mio orologio digitale, che segna i minuti ma non i secondi, passa ad indicare le 10:38, le tre lampadine si spengono contemporaneamente. Che ora segnerà il mio orologio quando si riaccenderanno tutte e tre insieme per la prima volta ?

N.B. L'espressione "si accendono ogni x minuti" significa "tra un'accensione e la successiva riaccensione passano x minuti". (Per indicare, per esempio, le 10:38, scrivete 1038.)

8. Tanti addendi

Qual è il risultato della seguente somma?

$$\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\ldots+\frac{2005+2006}{2007}+\frac{2008+2009}{2010}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{669}+\frac{1}{670}\right)$$

9. La principessa Cunegonda

La principessa Cunegonda è nata il primo gennaio del 1992. Una fata, che passava per caso vicino alla culla in cui giaceva Cunegonda appena nata, fece la seguente predizione: "Nel primo anno m in cui la cifra delle unità dell'età di Cunegonda sarà uguale alla cifra delle unità di m^m, a Cunegonda accadrà qualcosa di meraviglioso". La predizione si è poi avverata. In che anno?

10. Un alfabeto con molte lettere

Uno strano paese ha esattamente un milione di abitanti che parlano una lingua con un alfabeto molto ricco. Ogni abitante di quel paese possiede un cognome, un nome e un soprannome le cui tre lettere iniziali sono diverse fra loro. Sapete che è possibile identificare ognuno degli abitanti usando solo le lettere iniziali, nell'ordine, del cognome, del nome e del soprannome. Quante devono essere al minimo le lettere dell'alfabeto usato in quel paese?

11. Lo spessore dell'esagono

Chiamiamo "*spessore di un esagono regolare*" lo spessore della corona circolare delimitata dalla circonferenza ad esso circoscritta e da quella ad esso inscritta (cioè la differenza fra il maggiore e il minore dei due raggi). Immaginiamo ora una sequenza di esagoni regolari, il primo di lato 1, il secondo di lato 2, il terzo di lato 3 e così via. Che posto occupa nella sequenza il primo di questi esagoni il cui spessore supera 130?

12. Coppie di numeri

Trovate tutte le coppie $\{a,b\}$ di numeri interi positivi, con $a < b$, tali che la somma di tutti i numeri interi strettamente compresi tra a e b (cioè contemporaneamente maggiori di a e minori di b) sia 1999. Scrivete la somma degli elementi di tutte queste coppie (ad esempio, se le coppie fossero $\{a,b\}$, $\{c,d\}$, $\{e,f\}$ dovreste scrivere il numero $a + b + c + d + e + f$).

13. Un insieme di numeri speciale

Un insieme S di numeri interi è tale che il suo elemento più piccolo è 1001 e il prodotto di tutti i suoi elementi è un quadrato perfetto. Qual è il più piccolo valore che può avere il più grande elemento di S?

14. Rettangoli e quadrati

L'area della regione rettangolare in figura è 2010 m^2. La regione è suddivisa in sette quadrati e due rettangoli, come indicato. Le dimensioni di tutti i quadrati e i rettangoli di cui si parla sono espresse, in metri, da numeri interi. I due rettangoli, che in figura appaiono ombreggiati, hanno le stesse dimensioni e quadrati hanno la dimensione massima possibile compatibilmente con i vincoli del problema. Qual è, in metri, il perimetro di ciascuno dei due rettangoli?

15. L'esame di matematica

Alcuni studenti si sono presentati all'esame di matematica. Il professore aveva preparato 8 diversi problemi, tutti della stessa difficoltà, ed è riuscito ad assegnarne 3 ad ogni studente in modo che non vi fossero studenti con più di un problema in comune. Quanto possono essere al massimo gli studenti che si sono presentati all'esame?

Quesiti

1. Da casa a scuola

Da casa mia a scuola vado sempre a piedi, partendo sempre alla stessa ora. Se cammino alla velocità di 4 Km/h, arrivo con un ritardo di 5 minuti sull'inizio delle lezioni, se invece cammino alla velocità di 5 Km/h, arrivo 10 minuti prima dell'inizio delle lezioni. Quanti metri dista la scuola dalla mia casa?

[5000] A 4 Km/h, in 5 minuti si percorrono 4000/12 metri; a 5 Km/h, in 10 minuti si percorrono 5000/6 metri. Allora, detta x la distanza (in metri) cercata e detto t il tempo (in frazione di ora) che ho a disposizione per raggiungerla, devono valere entrambe le uguaglianze $4t = x - 4000/12$ e $5t = x + 5000/6$. Ricavando t da una delle due e sostituendolo nell'altra, si ottiene $x = 5000$.

2. Un'equazione con molte incognite

Chiamiamo "septina" un insieme ordinato di 7 numeri: due septine sono uguali se e solo se hanno numeri uguali nelle posizioni corrispondenti, cioè se sono uguali i loro due primi numeri, i loro secondi due e così via fino ai loro settimi due. Quante diverse septine di numeri interi relativi (a, b, c, d, e, f, g) sono tali che $2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 9$?

[2820] Conviene iniziare puntando l'attenzione su a, che può assumere solo i valori ± 2, ± 1 e 0. Per ognuno di questi casi, conviene contare dapprima solo le septine formate da interi non negativi.
Sia dunque $a = 2$. Solo uno degli altri 6 valori può e deve essere 1, gli altri dovendo essere 0. Vi sono quindi 6 septine possibili, che diventano $6 \times 2^2 = 24$ se si contano le septine di questo tipo di segno qualunque.
Sia poi $a = 1$. Una e una sola delle rimanenti incognite deve essere 2 ed esattamente tre delle rimanenti devono essere 1. Vi sono 6 possibilità di attribuire 2 e, per ciascuna di esse, 10 (tante quante le possibili terne non ordinate di 5 oggetti) possibilità di attribuire 1, per un totale di 60 septine che diventano $60 \times 2^5 = 1920$ se i segni possono diventare qualunque.
Sia infine $a = 0$. Vi sono tre possibili sottocasi. Una qualunque delle rimanenti incognite assume il valore 3: le altre devono assumere il valore 0, e si generano così $6 \times 2 = 12$ septine di segno qualunque.
Due delle rimanenti incognite assumono il valore 2: una e una sola delle altre deve assumere il valore 1, per un totale di $15 \times 4 = 60$ septine "non negative", dunque $60 \times 2^3 = 480$ septine di segno qualunque.
Infine, una sola delle rimanenti incognite assume il valore 2: tutte le rimanenti altre devono assumere il valore 1, per un totale di 6 septine "non negative", dunque $6 \times 2^6 = 384$ septine di segno qualunque.

3. Questo è un anno particolare

L'anno 2010 ha la curiosa peculiarità che il numero formato dalle sue prime due cifre è un multiplo di quello formato dalle ultime due. La stessa cosa succede ad esempio per l'anno 2404. Quanti dei prossimi 400 anni, cioè degli anni dal 2011 al 2410 inclusi, avranno questa proprietà?

[0017] Con evidente significato delle scritture, gli anni sono tutti e soli i seguenti:
20{20}, 21{01, 03, 07, 21}, 22{01, 02, 11, 22}, 23{01, 23}, 24{01, 02, 03, 04, 06, 08}.

4. La scacchiera

In una ordinaria scacchiera 8×8 (32 caselle bianche e 32 caselle nere alternate in orizzontale e in verticale), chiamiamo "*cammino a zig-zag*" un insieme di 8 caselle bianche, una per ogni riga, tali che, per ogni riga dalla seconda all'ottava, la casella che sta in tale riga abbia in comune un vertice con quella che sta nella riga precedente. Quanti diversi cammini a zig-zag si possono trovare?

[0296] Scriviamo 1 in ogni casella bianca della prima riga. In ogni casella bianca della seconda riga scriviamo la somma dei numeri scritti nelle caselle della riga superiore che hanno un vertice in comune con essa, e procediamo in questo modo nelle righe successive: è chiaro che, per ogni casella bianca, il numero che vi compare dopo tale operazione rappresenta il numero di possibili cammini "parziali" a zig-zag che, partendo dalla prima riga, hanno termine nella casella in questione. Se la prima casella della prima riga della scacchiera è bianca, nelle otto righe si hanno in successione i seguenti numeri (una riga per ogni parentesi graffa): {1, 1, 1, 1}, {2, 2, 2, 1}, {2, 4, 4, 3}, {6, 8, 7, 3}, {6, 14, 15, 10}, {20, 29, 25, 10}, {20, 49, 54, 35}, {69, 103, 89, 35}. Il numero cercato è la somma dei numeri presenti nell'ultima riga.

5. Facce e vertici

Su ogni faccia di un cubo abbiamo scritto un numero intero strettamente positivo. Su ogni vertice abbiamo scritto il prodotto dei 3 numeri scritti sulle facce che concorrono in quel vertice. La somma dei numeri scritti nei vertici è 70. Qual è la somma dei numeri scritti sulle facce?

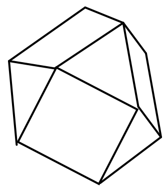
[0014] Siano (a, A), (b, B) e (c, C) le tre coppie di interi positivi assegnate alle tre coppie di facce opposte del cubo. È facile calcolare che deve essere

$$70 = 2 \times 5 \times 7 = (a + A) \times (b + B) \times (c + C)$$

dove nessuno dei fattori indicati nel terzo membro può essere 1: ognuno di tali fattori dunque può valere solo 2, 5 o 7 e tutti questi valori devono essere assunti.

6. Il cubottaedro

Abbiamo un cubo di 6 centimetri di lato. Fissato un vertice, consideriamo il piano che passa per i punti di mezzo di ciascuno dei tre spigoli che vi concorrono: questo piano seziona il cubo in due solidi, di cui uno è una piramide con vertice nello spigolo in questione. Per ogni vertice del cubo, eliminiamo la piramide ottenuta in questo modo: rimane un solido convesso con facce che sono quadrati o triangoli (detto cubottaedro). Quanti centimetri cubi misura il suo volume?



[0180] Chiaramente le otto piramidi eliminate hanno tutte le stesse dimensioni: basta dunque sottrarre dal volume del cubo 8 volte il volume di una di esse. Ogni piramide ha tre spigoli a due a due perpendicolari e ciascuno ha lunghezza 3: allora il volume della piramide è $3^2/2$. Si ha $6^3 - 8 \times 3^2/2 = 216 - 36 = 180$.

7. Tre lampadine

Tre lampadine intermittenti si accendono una ogni due minuti, un'altra ogni due minuti e mezzo e la terza ogni tre minuti. Ognuna delle tre, quando si accende, rimane accesa per un minuto e mezzo. Nell'istante in cui il mio orologio digitale, che segna i minuti ma non i secondi, passa ad indicare le 10:38, le tre lampadine si spengono contemporaneamente. Che ora segnerà il mio orologio quando si riaccenderanno tutte e tre insieme per la prima volta ?
N.B. L'espressione "si accendono ogni x minuti" significa "tra un'accensione e la successiva riaccensione passano x minuti". (Per indicare, per esempio, le 10:38, scrivete 1038.)

[1106] Il primo intero divisibile per 2, 5/2 e 3 è 30, quindi se le lampadine si accendono contemporaneamente in un dato istante, la prima volta che si accenderanno di nuovo contemporaneamente è 30 minuti dopo. Alle 10:36 e 30 secondi le lampadine si sono accese contemporaneamente.

8. Tanti addendi

Qual è il risultato della seguente somma?

$$\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+...+\frac{2005+2006}{2007}+\frac{2008+2009}{2010}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{669}+\frac{1}{670}\right)$$

[1340] Nella prima parentesi compaiono (una e una sola volta) tutti i 2010/3 = 670 addendi del tipo $(3n-2+3n-1)/3n = 2-1/n$ al variare di n intero fra 1 e 670; nella seconda parentesi compaiono (una e una sola volta) tutti gli addendi del tipo $1/n$ al variare di n intero fra 1 e 670. Al variare di n, sommando l'ennesimo addendo della prima parentesi con quello della seconda si ottiene dunque sempre 2. Il risultato segue dalla commutatività della somma.

9. La principessa Cunegonda

La principessa Cunegonda è nata il primo gennaio del 1992. Una fata, che passava per caso vicino alla culla in cui giaceva Cunegonda appena nata, fece la seguente predizione: "Nel primo anno m in cui la cifra delle unità dell'età di Cunegonda sarà uguale alla cifra delle unità di m^m, a Cunegonda accadrà qualcosa di meraviglioso". La predizione si è poi avverata. In che anno?

[2008] Incominciamo ad esaminare con quali cifre possono terminare le potenze intere successive di un numero che termina con la cifra n. Si hanno i seguenti risultati (la prima cifra è n, la cifra o le cifre in parentesi graffa indicano il ciclo): 0 {0}; 1 {1}; 2 {2, 4, 8, 6}; 3 {3, 9, 7, 1}; 4 {4, 6}; 5 {5}; 6 {6}; 7 {7, 9, 3, 1}; 8 {8, 4, 2, 6}; 9 {9, 1}. Tenuto conto dell'età di Cunegonda negli anni a partire dal 1993 (1 anno nel 1993, 2 nel 1994 e così via), si osserva che i soli anni da esaminare sono il 1993, il 1998, il 2003 e il 2008 nei quali la cifra delle unità dell'età di Cunegonda è rispettivamente 1, 6, 1, 6. Il ciclo di cifre finali per ognuno di questi anni è lungo 4: confrontando la cifra che nel ciclo occupa il posto indicato dal resto della divisione per 4 del numero dell'anno con la rispettiva cifra finale dell'età, si ottiene il risultato.

10. Un alfabeto con molte lettere

Uno strano paese ha esattamente un milione di abitanti che parlano una lingua con un alfabeto molto ricco. Ogni abitante di quel paese possiede un cognome, un nome e un soprannome le cui tre lettere iniziali sono diverse fra loro. Sapete che è possibile identificare ognuno degli abitanti usando solo le lettere iniziali, nell'ordine, del cognome, del nome e del soprannome. Quante devono essere al minimo le lettere dell'alfabeto usato in quel paese?

[0102] Le terne ordinate, a due a due diverse fra loro, che si possono formare avendo a disposizione $n > 2$ oggetti sono in numero di $n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$. È chiaro che questo numero è minore di n^3 qualunque sia n (intero positivo), dunque non bastano 100 lettere. Una verifica diretta mostra che non ne bastano neppure 101, ma che ne bastano 102.

11. Lo spessore dell'esagono

Chiamiamo "*spessore di un esagono regolare*" lo spessore della corona circolare delimitata dalla circonferenza ad esso circoscritta e da quella ad esso inscritta (cioè la differenza fra il maggiore e il minore dei due raggi). Immaginiamo ora una sequenza di esagoni regolari, il primo di lato 1, il secondo di lato 2, il terzo di lato 3 e così via. Che posto occupa nella sequenza il primo di questi esagoni il cui spessore supera 130?

[0971] Detta n la lunghezza del lato di un esagono, lo spessore dell'esagono è $n(1 - \sqrt{3}/2)$.
$n(1 - \sqrt{3}/2) > 130$ equivale a $n > 260(2 + \sqrt{3})/ \{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})\}$, dunque a $(n - 520)^2 > 202.800$.
Il più piccolo intero positivo il cui quadrato supera 202.800 è 451.

12. Coppie di numeri

Trovate tutte le coppie $\{a,b\}$ di numeri interi positivi, con $a < b$, tali che la somma di tutti i numeri interi strettamente compresi tra a e b (cioè contemporaneamente maggiori di a e minori di b) sia 1999. Scrivete la somma degli elementi di tutte queste coppie (ad esempio, se le coppie fossero $\{a,b\}$, $\{c,d\}$, $\{e,f\}$ dovreste scrivere il numero $a + b + c + d + e + f$).

[5997] Chiaramente la coppia {1998, 2000} è accettabile. Sia ora $\{n, n + k + 1\}$ un'altra coppia accettabile, cioè si abbia (ricordando che la somma dei primi k interi positivi vale $k(k + 1)/2$)
$n + 1 + n + 2 + \ldots + n + k = k(n + (k + 1)/2) = 1999$. Ora il numero 1999 è primo, dunque l'unico valore dispari ammissibile per k è 1, che fornisce la coppia già trovata, e l'unico valore pari è 2 (infatti, se $k = 2h$, da $2h(2n + 2h + 1) = 1999 \times 2$ segue che h divide 1999). $k = 2$ fornisce la coppia {998, 1001}.

13. Un insieme di numeri speciale

Un insieme S di numeri interi è tale che il suo elemento più piccolo è 1001 e il prodotto di tutti i suoi elementi è un quadrato perfetto. Qual è il più piccolo valore che può avere il più grande elemento di S?

[1040] Si ha $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Questi fattori primi dovranno quindi comparire complessivamente un numero dispari di volte negli elementi successivi di S. Nell'ottica di trovare un candidato plausibile per il più grande elemento di S, iniziamo ad esaminare i multipli successivi di 13. Troviamo:
$13 \times 78 = 13^2 \times 6$: sarebbe necessaria la presenza di un ulteriore multiplo di 13;
13×79: sarebbe necessaria la presenza di un ulteriore multiplo di 79, che non potrebbe essere inferiore a 14×79, in quanto $12 \times 79 < 1001$; ma si ha $14 \times 79 > 13 \times 80$;
$13 \times 80 = 13 \times 2^4 \times 5$: potrebbe essere accettabile.
In effetti, $S = \{1001 = 7 \times 11 \times 13,\ 1008 = 7 \times 2^4 \times 3^2,\ 1012 = 2^2 \times 11 \times 23,\ 1035 = 5 \times 3^2 \times 23,$

$1040 = 2^4 \times 5 \times 13\}$ soddisfa le condizioni imposte.

14. Rettangoli e quadrati

L'area della regione rettangolare in figura è 2010 m^2. La regione è suddivisa in sette quadrati e due rettangoli, come indicato. Le dimensioni di tutti i quadrati e i rettangoli di cui si parla sono espresse, in metri, da numeri interi. I due rettangoli, che in figura appaiono ombreggiati, hanno le stesse dimensioni e quadrati hanno la dimensione massima possibile compatibilmente con i vincoli del problema. Qual è, in metri, il perimetro di ciascuno dei due rettangoli?

[0134] Dette (in metri) x la lunghezza del lato dei quadrati più piccoli e b la lunghezza della base di ciascuno dei due rettangoli ombreggiati, deve valere $3x(3x + 3x + 2b) = 2010$. La fattorizzazione in interi primi di 2010 è $2 \times 3 \times 5 \times 67$ e quindi x può valere solo 1 oppure 5. Volendo massimizzare la dimensione dei quadrati, si deve assumere $x = 5$, da cui risulta $b = 52$.

15. L'esame di matematica

Alcuni studenti si sono presentati all'esame di matematica. Il professore aveva preparato 8 diversi problemi, tutti della stessa difficoltà, ed è riuscito ad assegnarne 3 ad ogni studente in modo che non vi fossero studenti con più di un problema in comune. Quanto possono essere al massimo gli studenti che si sono presentati all'esame?

[0008] Nessun problema può essere stato assegnato a più di tre studenti. Se infatti uno stesso problema fosse stato assegnato a quattro studenti, per completare le terne si sarebbero rese necessarie 4 coppie a due a due disgiunte di problemi, non realizzabili con i soli 7 problemi rimanenti. Allora ogni problema è stato assegnato ad al più tre studenti, dunque il numero di studenti non può superare $3 \times 8/3 = 8$. D'altra parte, indichiamo con A, B, …, G, H gli 8 problemi. Le 8 terne di problemi ABC, ADE, AFG, BDG, BFH, CDH, CEF, EGH soddisfano il requisito richiesto.