



Kangourou della Matematica 2010
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Mirabilandia, 8 maggio 2010



Quesiti

1. Sei cifre per due numeri

Avete a disposizione le cifre 1, 3, 4, 7, 8, 9 per formare due numeri di tre cifre ciascuno, e le dovete impiegare tutte. Volete che sia la somma, sia il prodotto dei due numeri che formate siano i più grandi possibile. Qual è il più grande dei due numeri?

2. Sull'aereo

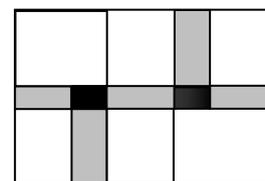
I sedili di un aereo sono disposti in 60 file "orizzontali" di 6 posti ciascuna, contraddistinti dalle lettere A,B, ..., F. Quando tutti i passeggeri hanno preso posto, si verifica la seguente circostanza: non ci sono due file in cui i posti occupati siano esattamente gli stessi, cioè tutti e soli quelli contraddistinti dalle stesse lettere. Quanti possono essere al massimo i passeggeri su quell'aereo?

3. La scacchiera

Quante sono le coppie (non ordinate) di caselle non adiacenti che si trovano su una scacchiera 8×8 ? (Due caselle si dicono "adiacenti" se sono diverse e hanno un lato in comune.)

4. La tavola di Maria

Maria vuole ricoprire una tavola di legno rettangolare di lati 60 e 40 cm utilizzando 6 adesivi quadrati, ciascuno di 22 cm di lato, senza tagliarli o ripiegarli. Allora li deve sovrapporre parzialmente e il risultato finale è quello illustrato in figura (dove le zone in bianco sono ricoperte da un solo adesivo, quelle in grigio da due adesivi, quelle in nero da più di due). Qual è, in cm^2 , l'area della superficie ricoperta da esattamente due adesivi?



5. Una sequenza lunga

Immaginate una sequenza di 2010 numeri interi positivi costruita con la regola seguente. Il primo (il più piccolo) è 3 e ciascuno dei successivi è la somma del precedente con il quadrato del precedente (cioè, se q è un numero della sequenza e p è il numero che lo precede nella sequenza, si ha $q = p + p^2$). Quali sono le ultime due cifre dell'ultimo (il più grande)?

6. Professori al lavoro

Per correggere 32 elaborati di matematica all'esame di terza media, un professore impiega 80 minuti; un altro professore, per correggere lo stesso numero di elaborati, impiega solo 60 minuti. Ogni professore impiega lo stesso tempo a correggere ogni elaborato. Se si mettessero insieme e si ripartissero 84 elaborati, in modo da iniziare e terminare insieme la correzione, quanti minuti impiegherebbero?

7. Una catena di disuguaglianze

Trovate la somma di tutti gli interi positivi pari n tali che $-53 < 2010/(53 - n) < 53 - n$.

8. L'elezione del presidente

Il presidente di un'associazione è stato scelto da tutti i membri fra due candidati, A e B . A ha ottenuto il doppio dei voti di B . 3 membri dell'associazione hanno votato scheda bianca, mentre ciascuno degli altri ha votato solo per A o solo per B . In questo modo, A ha ottenuto il 64% del totale dei voti possibili. Da quanti membri è composta l'associazione?

9. Una griglia da colorare

Avete una griglia quadrata formata dall'accostamento di 25×25 quadrati di lato 1 e vi divertite a colorare di rosso il bordo dei possibili quadrati i cui lati siano contenuti nel reticolo evidenziato dalla griglia, ovunque siano e di qualunque taglia essi siano. Qual è il minimo numero di quadrati di cui vi basta colorare il bordo se volete che tutte le linee della griglia di partenza risultino interamente colorate di rosso?

10. Un libro con molte pagine

Le pagine di un libro sono numerate partendo da 1. Per numerare tutte le pagine, sono state scritte in totale 3005 cifre. Quante pagine ha il libro?

11. Somme vincolate

Molti numeri interi positivi, ma non tutti, possono essere ottenuti come somma di addendi ciascuno dei quali sia 5 oppure 7. Scrivete la somma di tutti i numeri interi positivi che non possono essere ottenuti in questo modo; scrivete [0000] nel caso di questi numeri ve ne siano infiniti.

12. Un quadrato che è un cubo

Qual è l'unico numero di 4 cifre che è contemporaneamente un quadrato e un cubo perfetto?

13. Numeri simmetrici

Quanti numeri di 4 cifre (significative) della forma $ABBA$ sono multipli di 11?

14. Il prezzo del formaggio

Produrre un quintale di un formaggio fresco pregiato costa ad un caseificio 1200 euro. Prima di essere venduto, il formaggio va lasciato stagionare e la stagionatura gli fa perdere $1/5$ del peso iniziale. A quanti euro dovrà essere venduto un quintale di formaggio stagionato, se il caseificio vuole guadagnare il 15% di quello che spende per produrlo?

15. Il codice segreto

Paolo ha scoperto un trucco per ricordare il suo numero di codice di quattro cifre: ha osservato che è un quadrato perfetto e che, diviso per un qualunque intero fra 2 e 9 inclusi, dà come resto 1. Qual è il numero di codice di Paolo?



Kangourou della Matematica 2010
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Mirabilandia, 8 maggio 2010



Quesiti

1. Sei cifre per due numeri

Avete a disposizione le cifre 1, 3, 4, 7, 8, 9 per formare due numeri di tre cifre ciascuno, e le dovete impiegare tutte. Volete che sia la somma, sia il prodotto dei due numeri che formate siano i più grandi possibile. Qual è il più grande dei due numeri?

[0941] È chiaro il più grande dei due numeri deve iniziare per 9 e l'altro per 8. Le cifre delle decine devono allora essere 7 e 4, e quelle delle unità 3 e 1. Qualsiasi siano le scelte con questi vincoli, la somma dei due numeri non cambia. Una verifica diretta mostra che cambia invece il prodotto, massimizzato con la scelta 941 e 873.

2. Sull'aereo

I sedili di un aereo sono disposti in 60 file "orizzontali" di 6 posti ciascuna, contraddistinti dalle lettere A,B, ..., F. Quando tutti i passeggeri hanno preso posto, si verifica la seguente circostanza: non ci sono due file in cui i posti occupati siano esattamente gli stessi, cioè tutti e soli quelli contraddistinti dalle stesse lettere. Quanti possono essere al massimo i passeggeri su quell'aereo?

[0189] Per ogni fila sono possibili $2^6 = 64$ occupazioni a due a due diverse (tante quanti gli allineamenti ordinati di lunghezza 6 di due simboli, "occupato" e "libero"). Ogni "occupazione" ne individua esattamente una complementare (quella in cui "occupato" si scambia con "libero"): si possono formare allora al massimo 32 coppie di file, ogni fila con occupazione diversa da ogni altra, e ogni coppia può ospitare complessivamente 6 viaggiatori, per un totale di 192 viaggiatori. Ma nel nostro aereo vi sono solo 60 file: volendo massimizzare il numero di passeggeri compatibile con il nostro vincolo, dobbiamo allora eliminare, fra le file che costituiscono le coppie di cui sopra, l'unica fila prevista vuota e tre qualunque delle sei file contenenti un solo passeggero.

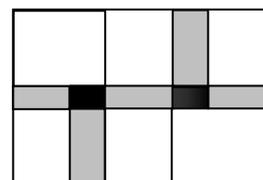
3. La scacchiera

Quante sono le coppie (non ordinate) di caselle non adiacenti che si trovano su una scacchiera 8×8 ? (Due caselle si dicono "adiacenti" se sono diverse e hanno un lato in comune.)

[1904] Le coppie non ordinate di caselle sono 32×63 ; di esse sono adiacenti 7 coppie su ogni riga e 7 coppie su ogni colonna per un totale di $8 \times 7 \times 2$ coppie. Quindi le coppie di caselle non adiacenti sono $32 \times 9 \times 7 - 16 \times 7 = 1904$.

4. La tavola di Maria

Maria vuole ricoprire una tavola di legno rettangolare di lati 60 e 40 cm utilizzando 6 adesivi quadrati, ciascuno di 22 cm di lato, senza tagliarli o ripiegarli. Allora li deve sovrapporre parzialmente e il risultato finale è quello illustrato in figura (dove le zone in bianco sono ricoperte da un solo adesivo, quelle in grigio da due adesivi, quelle in nero da più di due). Qual è, in cm^2 , l'area della superficie ricoperta da esattamente due adesivi?



[0408] Si ha $22 \times 2 = 44$. Allora ciascuno dei tre rettangoli “allineati in orizzontale” ricoperti da esattamente due adesivi ha area $(60 - 22 - 6)/2 \times 4 = 64 \text{ cm}^2$; ciascuno degli altri due “disposti in verticale” ha area $6 \times 18 \text{ cm}^2$.

5. Una sequenza lunga

Immaginate una sequenza di 2010 numeri interi positivi costruita con la regola seguente. Il primo (il più piccolo) è 3 e ciascuno dei successivi è la somma del precedente con il quadrato del precedente (cioè, se q è un numero della sequenza e p è il numero che lo precede nella sequenza, si ha $q = p + p^2$). Quali sono le ultime due cifre dell'ultimo (il più grande)?

[0092] I primi 3 numeri della sequenza sono 3, 12 e 156. Basta notare ora che, se le ultime due cifre di un numero p sono 56, il numero $p + p^2$ ha come ultime due cifre 92 e viceversa.

6. Professori al lavoro

Per correggere 32 elaborati di matematica all'esame di terza media, un professore impiega 80 minuti; un altro professore, per correggere lo stesso numero di elaborati, impiega solo 60 minuti. Ogni professore impiega lo stesso tempo a correggere ogni elaborato. Se si mettessero insieme e si ripartissero 84 elaborati, in modo da iniziare e terminare insieme la correzione, quanti minuti impiegherebbero?

[0090] In 60 minuti, insieme possono correggere $32 + 32 \times 3/4 = 56$ elaborati. Si ha $84 = 56 \times 3/2$.

7. Una catena di disuguaglianze

Trovate la somma di tutti gli interi positivi pari n tali che $-53 < 2010/(53 - n) < 53 - n$.

[0302] Per $n < 53$, basta occuparsi della seconda disuguaglianza, che diventa $\sqrt{2010} < 53 - n$. Dal momento che $44 < \sqrt{2010} < 45$, sono accettabili tutti e soli i valori positivi pari di n tra 2 e 8 inclusi.

Per $n > 53$, la catena di disuguaglianze diventa $-53^2 + 53n > 2010 > (53 - n)^2$. La prima fornisce $n > (2010 + 53^2)/53 = 90 + 49/53$, la seconda $n < 98$. I tre valori 92, 94 e 96 sono tutti accettabili.

8. L'elezione del presidente

Il presidente di un'associazione è stato scelto da tutti i membri fra due candidati, A e B . A ha ottenuto il doppio dei voti di B . 3 membri dell'associazione hanno votato scheda bianca, mentre ciascuno degli altri ha votato solo per A o solo per B . In questo modo, A ha ottenuto il 64% del totale dei voti possibili. Da quanti membri è composta l'associazione?

[0075] Se x indica il numero dei membri dell'associazione, si deve avere $2(x - 3)/3 = 64x/100$.

9. Una griglia da colorare

Avete una griglia quadrata formata dall'accostamento di 25×25 quadrati di lato 1 e vi divertite a colorare di rosso il bordo dei possibili quadrati i cui lati siano contenuti nel reticolo evidenziato dalla griglia, ovunque siano e di qualunque taglia essi siano. Qual è il minimo numero di quadrati di cui vi basta colorare il bordo se volete che tutte le linee della griglia di partenza risultino interamente colorate di rosso?

[0048] Consideriamo una diagonale della griglia iniziale. Per ogni nodo N presente su questa diagonale (vertici esclusi) consideriamo il quadrato avente N come un vertice e vertice opposto coincidente con il vertice della griglia più lontano da N . Si determinano così 24 quadrati per ognuna delle diagonali, ed è chiaro che, colorando tutti questi 48 quadrati, tutto il reticolo risulterà colorato. Colorare un numero di quadrati inferiore a 48 non è sufficiente. Infatti, i segmenti di lunghezza 1 giacenti sul reticolo ed aventi esattamente un estremo sul bordo della griglia sono 96, ed è ovvio che nessun quadrato con i lati contenuti nel reticolo può contenere più di due di tali segmenti.

10. Un libro con molte pagine

Le pagine di un libro sono numerate partendo da 1. Per numerare tutte le pagine, sono state scritte in totale 3005 cifre. Quante pagine ha il libro?

[1028] Per scrivere tutti numeri fino a 9 incluso si impiegano 9 cifre, per scrivere tutti quelli fra 10 e 99 inclusi se ne impiegano 180, per scrivere tutti quelli fra 100 e 999 inclusi se ne impiegano 2700, per scrivere ognuno dei successivi fino a 9999 se ne impiegano 4. Si ha $\{3005 - (9 + 180 + 2700)\}/4 = 29$ e $999 + 29 = 1028$.

11. Somme vincolate

Molti numeri interi positivi, ma non tutti, possono essere ottenuti come somma di addendi ciascuno dei quali sia 5 oppure 7. Scrivete la somma di tutti i numeri interi positivi che non possono essere ottenuti in questo modo; scrivete [0000] nel caso di questi numeri ve ne siano infiniti. [0114]

[0114] Ciascuno dei cinque interi consecutivi 24, 25, 26, 27, 28 può essere ottenuto nel modo descritto: è chiaro allora che lo può essere ognuno degli interi successivi, in quanto esprimibile sommando qualcuno di essi ad un multiplo opportuno di 5. Gli interi positivi che precedono 24 e che non possono essere ottenuti nel modo descritto sono chiaramente solo 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18 e 23.

12. Un quadrato che è un cubo

Qual è l'unico numero di 4 cifre che è contemporaneamente un quadrato e un cubo perfetto?

[4096] Dopo 1, il primo intero con le proprietà richieste è $2^6 = 64$ e il successivo è $3^6 = 729$. Il primo di 4 cifre è $4^6 = 2^{12} = 4096$ ed è l'unico di 4 cifre.

13. Numeri simmetrici

Quanti numeri di 4 cifre (significative) della forma $ABBA$ sono multipli di 11?

[0090] Tutti i 90 numeri della forma richiesta lo sono. Infatti lo è $1001 = 11 \times 91$ e si ha $ABBA = A \times 1001 + B \times 110$.

14. Il prezzo del formaggio

Produrre un quintale di un formaggio fresco pregiato costa ad un caseificio 1200 euro. Prima di essere venduto, il formaggio va lasciato stagionare e la stagionatura gli fa perdere $\frac{1}{5}$ del peso iniziale. A quanti euro dovrà essere venduto un quintale di formaggio stagionato, se il caseificio vuole guadagnare il 15% di quello che spende per produrlo?

[1725] Per ottenere un quintale di formaggio stagionato, il caseificio deve produrre 125 chili di formaggio fresco, spendendo 1500 euro. Il 15% di 1500 è 225.

15. Il codice segreto

Paolo ha scoperto un trucco per ricordare il suo numero di codice di quattro cifre: ha osservato che è un quadrato perfetto e che, diviso per un qualunque intero fra 2 e 9 inclusi, dà come resto 1. Qual è il numero di codice di Paolo?

[5041] Sia N il numero di codice: $N - 1$ deve essere divisibile per il minimo comune multiplo fra tutti gli interi compresi fra 2 e 9, dunque per $8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2520$. Per N vi sono allora tre candidati di quattro cifre: 2521, 5041 e 7561. Di questi, solo il secondo è un quadrato perfetto.