Kangourou della Matematica 2010
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 10 maggio 2010

# *LIVELLO CADET*

FOGLIO PER IL CONCORRENTE. ATTENZIONE: TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE!

**C1.** (*5 punti*) Pierino deve salire una scalinata composta da più di 1000 gradini. Sale saltando due gradini alla volta (cioè facendo i gradini tre a tre) partendo dalla base della scala (dunque il primo gradino della scala su cui mette piede è il numero 3), ma quando mette il piede su un gradino pari scende di uno per poi continuare la sua salita. Toccherà il gradino numero 699?

**C2.** (*7 punti*) Per ogni intero positivo *n* con meno di 10 cifre, definiamo numero "sommario di *n*" il numero di 3 cifre *ABC* dove *A*, *B* e *C* sono rispettivamente il numero di tutte le cifre, delle cifre dispari e delle cifre pari di *n.* (Per esempio, il sommario di 2010 è 413). Quanti sono i numeri *n* tali che il sommario di *n* sia 321?

**C3.** (*11 punti*) Ciascuno dei tre numeri interi positivi consecutivi 22, 23, 24 ha la seguente proprietà: gli esponenti a cui, nella sua fattorizzazione in numeri primi, compaiono elevati i suoi fattori primi sono tutti dispari. Qual è il più alto numero di interi positivi consecutivi ciascuno dei quali goda di questa proprietà?

**C4.** (*14 punti*) Hai a disposizione una griglia 15 × 15 e una griglia 7 × 7. Per ciascuna delle due rispondi alla seguente domanda, motivando la risposta.

> È possibile mettere in ogni cella della griglia un numero intero relativo in modo che la somma di tutti i numeri inseriti sia positiva, ma la somma dei numeri inseriti in ogni sotto-griglia 3 × 3 sia negativa?

(Per "sotto-griglia" si intende una griglia ottenuta troncando righe e colonne adiacenti della griglia di partenza, senza operare permutazioni su righe o colonne.)

**C5.** (*18 punti*) Due giocatori hanno a disposizione una griglia quadrata 2010 × 2010 e una pila (praticamente inesauribile) di monete. Il gioco consiste nel mettere a turno una moneta in un quadrato della griglia, cercando di fare in modo che quattro monete vengano a determinare i vertici di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia. Vince il primo giocatore che, in presenza di tre monete già collocate, mette la quarta così da realizzare il rettangolo. Esiste una strategia vincente? In caso affermativo, a vantaggio di quale dei due giocatori: il primo o il secondo a giocare?

**C6.** (*22 punti*) Siano:

- *ABC* un triangolo equilatero;
- *D*, *E*, *F* rispettivamente i punti di *BC*, *CA* e *AB* che hanno da *C*, *A*, *B* distanza pari ad 1/3 del lato.

I segmenti *AD*, *BE*, *CF* intersecandosi individuano un triangolo: qual è il rapporto tra l'area di tale triangolo e quella di *ABC*?

## *LIVELLO CADET*

**C1**. (*5 punti*) Pierino deve salire una scalinata composta da più di 1000 gradini. Sale saltando due gradini alla volta (cioè facendo i gradini tre a tre) partendo dalla base della scala (dunque il primo gradino della scala su cui mette piede è il numero 3), ma quando mette il piede su un gradino pari scende di uno per poi continuare la sua salita. Toccherà il gradino numero 699?

**Soluzione**: si.
Quando Pierino mette il piede su un gradino di numero $p$ pari, i gradini successivi saranno nell'ordine:
- il gradino dispari precedente,
- il primo gradino pari dopo $p$,
- il gradino dispari successivo a $p$.

Questo significa che, se Pierino mette il piede su un gradino pari, dovrà mettere poi piede su tutti i successivi (tranne eventualmente l'ultimo se il numero dei gradini è dispari). Ora basta osservare che Pierino deve mettere piede per esempio sul gradino 6.

**C2**. (*7 punti*) Per ogni intero positivo $n$ con meno di 10 cifre, definiamo numero "sommario di $n$" il numero di 3 cifre $ABC$ dove $A$, $B$ e $C$ sono rispettivamente il numero di tutte le cifre, delle cifre dispari e delle cifre pari di $n$. (per esempio, il sommario di 2010 è 413). Quanti sono i numeri $n$ tali che il sommario di $n$ sia 321?

**Soluzione**: 350.
I numeri con sommario 321 hanno tre cifre, di cui due dispari, che indichiamo con $D$ e una pari che indichiamo con $P$.
I numeri della forma $DDP$ sono 125, quelli della forma $DPD$ 125 mentre quelli della forma $PDD$ sono 100.

**C3**. (*11 punti*) Ciascuno dei tre numeri interi positivi consecutivi 22, 23, 24 ha la seguente proprietà: gli esponenti a cui, nella sua fattorizzazione in numeri primi, compaiono elevati i suoi fattori primi sono tutti dispari. Qual è il più alto numero di interi positivi consecutivi ciascuno dei quali goda di questa proprietà?

**Soluzione**: 7.

È chiaro che, comunque scelti 8 interi consecutivi, fra di essi vi sono due diversi multipli di quattro: siano $n$ e $n + 4$. Sia $n = 2^k H$ con $k$ e $H$ dispari, $k \geq 3$: allora nella fattorizzazione di $n + 4 = 2^2(2^{k-2}H + 1)$ il fattore primo 2 compare elevato ad un esponente pari. D'altra parte, la sequenza {29, 30, …, 34, 35} è composta da 7 numeri consecutivi che soddisfano la richiesta.

**C4.** (*14 punti*) Hai a disposizione una griglia 15 × 15 e una griglia 7 × 7. Per ciascuna delle due rispondi alla seguente domanda, motivando la risposta.

> È possibile mettere in ogni cella della griglia un numero intero relativo in modo che la somma di tutti i numeri inseriti sia positiva, ma la somma dei numeri inseriti in ogni sotto-griglia 3 × 3 sia negativa?

(Per "sotto-griglia" si intende una griglia ottenuta troncando righe e colonne adiacenti della griglia di partenza, senza operare permutazioni su righe o colonne.)

**Soluzione:** no per la 15 × 15, si per la 7 × 7.

La griglia 15 × 15 è esprimibile accostando 25 griglie 3 × 3 a due a due disgiunte: è dunque impossibile raggiungere lo scopo. È invece possibile riempire una griglia 7 × 7 nel modo richiesto, ad esempio come mostrato a fianco.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | -9 | 1 | 1 | -9 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | -9 | 1 | 1 | -9 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**C5**. (*18 punti*) Due giocatori hanno a disposizione una griglia quadrata 2010 × 2010 e una pila (praticamente inesauribile) di monete. Il gioco consiste nel mettere a turno una moneta in un quadrato della griglia, cercando di fare in modo che quattro monete vengano a determinare i vertici di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia. Vince il primo giocatore che, in presenza di tre monete già collocate, mette la quarta così da realizzare il rettangolo. Esiste una strategia vincente? In caso affermativo, a vantaggio di quale dei due giocatori: il primo o il secondo a giocare?

**Soluzione**: esiste, a vantaggio del secondo.

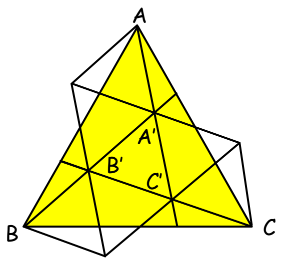
È sufficiente ripartire le colonne della griglia in 1005 coppie (ad esempio la prima con la seconda, la terza con la quarta e così via). Quando il primo giocatore inserisce una moneta, egli individua una coppia di colonne: allora il secondo ne inserisce un'altra nella casella adiacente appartenente alla stessa riga e alla colonna rimasta libera fra le due della coppia individuata. Dopo al più 1005 mosse il primo giocatore è costretto a mettere una moneta in una colonna dove ve ne è già una: a quel punto il secondo giocatore può realizzare la disposizione rettangolare.

**C6**. (*22 punti*) Siano:

- *ABC* un triangolo equilatero;
- *D*, *E*, *F* rispettivamente i punti di *BC*, *CA* e *AB* che hanno da *C*, *A*, *B* distanza pari ad 1/3 del lato.

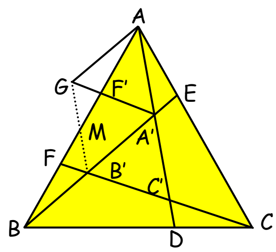
I segmenti *AD*, *BE*, *CF* intersecandosi individuano un triangolo: qual è il rapporto tra l'area di tale triangolo e quella di *ABC*?

**Soluzione**: 1/7.




Siano *A'*, *B'*, *C'* rispettivamente i punti di intersezione di *AD* e *BE*, di *BE* e *CF* e di *AD* e *CF* : per motivi di simmetria, il triangolo *A'B'C'* è equilatero.
L'idea è di verificare che il triangolo *ABC* è equivalente a 7 triangoli uguali a *A'B'C'* come suggerisce la figura riportata di lato.

Su *AB* denotiamo con *F'* il punto tale che *AF'=AB*/3 e quindi tale che *AF'=AE.*




Ruotando il triangolo *AA'E* di 60° in verso orario intorno ad *A* si ha il triangolo *AGF'* il cui angolo in G misura 60° (come l'angolo *AA'E*, che ha tale misura in quanto opposto al vertice di *B'A'C'* ) e quindi *F'* è allineato con *A'* e *G*, vertici del triangolo *A'AG* equilatero (in quanto isoscele con angolo al vertice *A'AG* che misura 60°).
Ne consegue che:

- il quadrilatero *A'EAF'* è equivalente al triangolo *A'AG* ;
- *A'F'* e *CF* sono paralleli (poiché gli angoli alterni interni *D'F'G* e *F'D'E'* misurano 60°) e visto che *F'F=FB* anche *A'B'=B'B* (triangoli simili).

Anche il quadrilatero *FB'A'F'* è equivalente al triangolo *GB'A'* che è uguale a *A'B'C'* (in quanto ha un lato in comune con esso ed è isoscele con angolo al vertice in *A'* che misura 60°). Infatti i due triangoli *GMF'* e *B'MF* sono uguali in quanto *GF'=A'E=B'F* e sono uguali i due angoli adiacenti a *GF'* e *B'F* (alterni interni tagliati sulle due rette parallele *FC* e *GA'* dalle due trasversali *FF'* e *GB'* ).
Riproducendo queste operazioni su ciascun lato del triangolo *ABC* si vede che tale triangolo è equivalente all'unione di 7 triangoli equilateri uguali a *A'B'C'* e quindi l'area di *A'B'C'* è 1/7 di quella di *ABC.*

Nota: poiché rapporti di segmenti allineati e rapporti di aree sono invarianti per affinità e, fissati due triangoli non degeneri, esiste una ed una sola affinità che trasforma l'uno nell'altro, l'ipotesi che il triangolo sia equilatero è inessenziale.