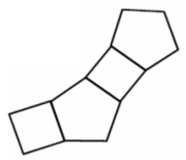
Kangourou della Matematica 2009
Coppa a squadre Kangourou – finale
Mirabilandia, 10 maggio 2009

Quesiti

1. Hai una discreta mira?

Come nel quesito *"Hai una buona mira?"* della semifinale, hai 11 palline: 6 colorate di rosso, indistinguibili fra loro, e 5 colorate di verde, indistinguibili fra loro. Ora sono due le scatole aperte, una bianca e una nera, nelle quali tenti di lanciare le palline: alcune (eventualmente nessuna) entreranno in una scatola, altre (eventualmente nessuna) nell'altra, altre (eventualmente nessuna) finiranno fuori. Quanti sono i possibili diversi esiti ? (Ad esempio: un esito è "3 palline verdi e 2 rosse nella scatola bianca, nessuna verde e 2 rosse nella scatola nera, le altre fuori", un esito diverso è "3 palline verdi e 2 rosse nella scatola nera, nessuna verde e 2 rosse nella scatola bianca, le altre fuori".)

2. Il circuito



Hai a disposizione alcuni pentagoni regolari e alcuni quadrati; i lati di questi poligoni hanno tutti la stessa lunghezza. Accostandoli alternando pentagoni a quadrati, in modo che un lato di un pentagono venga a combaciare con un lato di un quadrato e viceversa, vuoi comporre restando su un piano un circuito chiuso: la costruzione dell'anello deve procedere come ti è indicato dalla figura. Ammesso che sia possibile costruirlo, da quanti poligoni risulterà formato il circuito chiuso? (Scrivete 0000 se non è possibile costruirlo).

3. Marco sta ancora scrivendo?

Marco ha iniziato a scrivere la sequenza di numeri

7, 36, 65, 94, …

dove ognuno, dal secondo in poi, è il precedente aumentato di 29. Marco intende fermarsi non appena avrà scritto un numero le cui cifre siano tutte uguali a nove. Riuscirà Marco a fermarsi e, in caso affermativo, quanti numeri avrà scritto quando si sarà fermato? (Scrivete 0000 se non riuscirà a fermarsi.)

4. Un torneo ambito

Lo scorso anno ad un torneo di tennis ad eliminazione diretta hanno partecipato 32 giocatori. Nella prima fase ogni giocatore ne ha affrontato un altro (sono state giocate in totale 16 partite) e il perdente è stato eliminato. Nella seconda fase ognuno dei 16 vincenti ne ha affrontato un altro (sono state giocate in totale 8 partite) e il perdente è stato eliminato. Così si è proceduto fino alla quinta fase (la finale). Tutti gli accoppiamenti (tranne ovviamente l'ultimo) sono avvenuti per sorteggio.
Quest'anno le richieste di partecipazione, tutte accolte, sono state molte di più: guarda caso proprio 2009. Il comitato organizzatore ha deciso di sorteggiare alcuni giocatori, il minor numero possibile, da ammettere direttamente alla seconda fase e rendere quindi attuabile a partire dalla seconda fase il meccanismo illustrato sopra (numero dei giocatori dimezzabile ad ogni fase). Quante partite sono state giocate complessivamente quest'anno in quel torneo?

5. I sottoinsiemi speciali

Considerate l'insieme {1, 2, … , 151} dei primi 151 interi maggiori di zero. Tra tutti i suoi sottoinsiemi, volete sceglierne alcuni in modo che l'intersezione fra due qualunque di quelli che avete scelto sia costituita o da un numero solo o da una sequenza di numeri consecutivi (condizione soddisfatta, ad esempio, da entrambe le coppie di sottoinsiemi ({1, 2}, {2, 3}) e ({1, 2, 3}, {2, 3, 4}), ma non dalle coppie ({1, 2}, {3, 4}) o ({1, 2, 4}, {2, 3, 4})). Quanti sottoinsiemi potete scegliere al massimo?

6. Trova la frazione

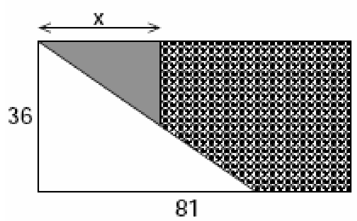
Il numeratore e il denominatore di una frazione sono entrambi numeri interi maggiori di zero e la loro somma non supera 103; il valore della frazione è il più alto possibile compatibilmente con il fatto di essere strettamente minore di 1/3.
Scrivete nell'ordine prima il numeratore e poi il denominatore della frazione.

7. I mezzi di trasporto

In una strana nazione vi sono 13 città che possono essere collegate tra loro da uno o più dei seguenti mezzi di trasporto: autobus, treno, aereo. Il presidente, il vice-presidente e il primo ministro devono poter visitare ogni città, ma ciascuno dei tre si rifiuta di usare uno dei tre mezzi: il presidente l'autobus, il vice-presidente il treno e il primo ministro l'aereo. Qual è il più piccolo numero di collegamenti fra le varie città che occorre predisporre per soddisfare tutte le esigenze?

8. Il rettangolo diventa un quadrato

La figura mostra le linee lungo le quali Marco ha tagliato un rettangolo di cartoncino, i cui lati misuravano 36 e 81 centimetri, ottenendo due triangoli e un pentagono. Accostando opportunamente i tre pezzi ricavati, Marco ha potuto realizzare un quadrato. Quanti centimetri è lungo il segmento indicato con x?



9. Numeri dispettosi

Diciamo che un numero intero positivo è *"dispettoso"* se diviso per 6 dà resto 5 e diviso per 8 dà resto 7. Trovate i primi due numeri dispettosi e scriveteli nell'ordine (per esempio, se fossero 65 e 86 dovreste scrivere 6586).

10. Quante pretese!

Stai cercando tutti i numeri interi positivi di quattro cifre ciascuno dei quali goda di tutte le seguenti proprietà:
- le cifre che lo compongono devono essere tutte diverse fra loro;
- deve essere un multiplo di 5;
- se si sopprime la cifra delle migliaia, il numero di tre cifre che resta deve essere un multiplo di 9;
- se si sopprime la cifra delle centinaia, il numero di tre cifre che resta deve essere un multiplo di 11;
- se si sopprime la cifra delle decine, il numero di tre cifre che resta deve essere un multiplo di 7.

Trova la loro somma.

11. Le porte

In un lunghissimo corridoio ci sono 1.000 porte numerate da 1 a 1.000 che inizialmente sono chiuse. All'inizio del corridoio ci sono 1.000 persone, numerate da 0 a 999, che agiscono come segue. La persona 0 percorre il corridoio dall'inizio e modifica lo stato di tutte le porte (dunque le apre tutte). Dopo di lei, la persona 1 percorre il corridoio dall'inizio: salta una porta (la prima) e modifica lo stato della seconda (in questo caso la chiude), quindi salta la terza e modifica lo stato della quarta e così via. Dopo di lei, la persona 2 percorre il corridoio dall'inizio saltando ordinatamente 2 porte su 3 (cioè la prima e la seconda, la quarta e la quinta e così via) e cambia lo stato delle porte che non salta. Si procede in questo modo: la persona n per corre il corridoio dall'inizio saltando ordinatamente n porte su $n + 1$ e cambiando lo stato di quelle che non salta (cioè aprendo quelle che trova chiuse e chiudendo quelle che trova aperte). Quando anche la millesima persona avrà compiuto il proprio percorso, quante saranno le porte rimaste aperte?

12. La griglia

In ogni cella della griglia 3×4 in figura vuoi sistemare un numero intero positivo rispettando tutte le seguenti regole:
- i numeri devono essere tutti diversi fra loro;
- in ogni riga ogni numero dal secondo (da sinistra) in poi è un multiplo del precedente;
- in ogni colonna ogni numero dal secondo (dall'alto) in poi è un multiplo del precedente.

			A

Qual è il più piccolo numero che può comparire nella cella indicata con *A*?

13. Anna e il suo cane

Anna sta passeggiando con il suo cane su una pista circolare che contorna un laghetto. La pista è lunga 500 metri. Ad un certo istante il cane inizia a correre alla velocità di 10 Km all'ora; Anna lo insegue correndo alla velocità di 8 Km all'ora. Quando la distanza fra il cane e Anna è diventata di 250 metri, Anna inverte il verso della sua corsa, con l'intenzione di recuperare il cane (che invece continua a correre nello stesso verso) correndogli incontro. Se le velocità del cane e di Anna rimangono le stesse, per quanti secondi Anna starà separata dal suo cane?

14. L'elezione del sindaco

A Kangcity si è svolto il ballottaggio fra Peter e Max per l'elezione alla carica di sindaco ed è in corso lo spoglio delle schede. Tutte le schede consegnate sono valide e non bianche. Per ogni numero intero k compreso fra 0 e 100, quando k% delle schede sono state scrutinate la commissione comunica l'esito del voto fino a quel momento. Quando, per un certo numero intero n, n% delle schede sono state scrutinate, Peter ha ottenuto il 62% dei voti scrutinati e Max il 38%: questo è il primo momento in cui Peter è sicuro di essere il nuovo sindaco. Quanto vale n?

15. Una frazione da semplificare

Qual è il valore della frazione $\dfrac{1001+1003+1005+...+1997+1999}{1+3+5+...+997+999}$?

Kangourou della Matematica 2009
Coppa a squadre Kangourou – finale
Mirabilandia, 10 maggio 2009

1. Hai una discreta mira?

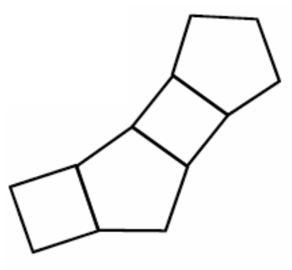
Come nel quesito *"Hai una buona mira?"* della semifinale, hai 11 palline: 6 colorate di rosso, indistinguibili fra loro, e 5 colorate di verde, indistinguibili fra loro. Ora sono due le scatole aperte, una bianca e una nera, nelle quali tenti di lanciare le palline: alcune (eventualmente nessuna) entreranno in una scatola, altre (eventualmente nessuna) nell'altra, altre (eventualmente nessuna) finiranno fuori. Quanti sono i possibili diversi esiti ? (Ad esempio: un esito è "3 palline verdi e 2 rosse nella scatola bianca, nessuna verde e 2 rosse nella scatola nera, le altre fuori", un esito diverso è "3 palline verdi e 2 rosse nella scatola nera, nessuna verde e 2 rosse nella scatola bianca, le altre fuori".)

Risposta: 0588

Siano b, n e f i numeri di palline rosse che finiranno rispettivamente nella scatola bianca, in quella nera o fuori; deve essere $b + n + f = 6$: è facile appurare che vi sono esattamente 28 terne ordinate $\{b,n,f\}$ di interi da 0 a 6 che soddisfano questa equazione (il loro numero coincide infatti con la somma degli interi da 1 a 7). Il ragionamento analogo fatto sulle palline verdi fornisce 21 terne ordinate. Ad ogni terna delle prime può essere associata una qualunque delle seconde.
$28 \times 21 = 588$.

2. Il circuito

Hai a disposizione alcuni pentagoni regolari e alcuni quadrati; i lati di questi poligoni hanno tutti la stessa lunghezza. Accostandoli alternando pentagoni a quadrati, in modo che un lato di un pentagono venga a combaciare con un lato di un quadrato e viceversa, vuoi comporre restando su un piano un circuito chiuso: la costruzione del circuito deve procedere come ti è indicato dalla figura. Ammesso che sia possibile costruirlo, da quanti poligoni risulterà formato il circuito chiuso? (Scrivete 0000 se non è possibile costruirlo).



Risposta: 0020

È facile verificare che ogni angolo interno di un pentagono regolare misura 108 gradi. Qualora un circuito chiuso come quello proposto possa essere costruito, la regione da esso delimitata internamente sarebbe un poligono di un certo numero n di lati tutti della stessa lunghezza e il numero n sarebbe la risposta al problema. Tale poligono risulterebbe regolare in quanto i suoi angoli interni, per costruzione, avrebbero tutti la stessa misura pari a $360 – 108 – 90 = 162$ gradi.
Si dovrebbe avere $162 \times n = 180 \times (n – 2)$: ciò accade se e solo se $n = 360/18 = 20$.

3. Marco sta ancora scrivendo?

Marco ha iniziato a scrivere la sequenza di numeri

7, 36, 65, 94, …

dove ognuno, dal secondo in poi, è il precedente aumentato di 29. Marco intende fermarsi non appena avrà scritto un numero le cui cifre siano tutte uguali a nove. Riuscirà Marco a fermarsi e, in caso affermativo, quanti numeri avrà scritto quando si sarà fermato? (Scrivete 0000 se non riuscirà a fermarsi.)

Risposta: 3449

Il numero che cerca Marco è il primo intero le cui cifre siano tutte uguali a nove che, diviso per 29, dia resto 7. Dividendo in successione i numeri 99, 999, 9.999 per 29 si ottengono come resti rispettivamente 12, 13 e 23. Si ha invece proprio 99.999 = 29 × 3448 + 7.

4. Un torneo ambito

Lo scorso anno ad un torneo di tennis ad eliminazione diretta hanno partecipato 32 giocatori. Nella prima fase ogni giocatore ne ha affrontato un altro (sono state giocate in totale 16 partite) e il perdente è stato eliminato. Nella seconda fase ognuno dei 16 vincenti ne ha affrontato un altro (sono state giocate in totale 8 partite) e il perdente è stato eliminato. Così si è proceduto fino alla quinta fase (la finale). Tutti gli accoppiamenti (tranne ovviamente l'ultimo) sono avvenuti per sorteggio.
Quest'anno le richieste di partecipazione, tutte accolte, sono state molte di più: guarda caso proprio 2009. Il comitato organizzatore ha deciso di sorteggiare alcuni giocatori, il minor numero possibile, da ammettere direttamente alla seconda fase e rendere quindi attuabile a partire dalla seconda fase il meccanismo illustrato sopra (numero dei giocatori dimezzabile ad ogni fase). Quante partite sono state giocate complessivamente quest'anno in quel torneo?

Risposta: 2008

Perché il meccanismo dello scorso anno sia direttamente applicabile occorre che il numero dei giocatori sia una potenza (intera) di 2: 2009 chiaramente non lo è e la prima potenza di 2 che supera 2009 è $2048 = 2^{11}$. Se si ammettono direttamente alla seconda fase 2048 – 2009 = 39 giocatori, per la prima fase si devono giocare $2^{10} - 39 = 1024 - 39 = 985$ partite. Per le fasi successive si dovranno poi giocare $2^9, 2^8, \ldots, 2, 1$ partite. In totale le partite saranno dunque $985 + 2^9 + 2^8 + \ldots + 2 + 1 = 985 + (2^{10} - 1)/(2 - 1) = 985 + 1023 = 2008$.
Provate a dimostrare che, qualunque sia il numero n dei partecipanti, se si segue questa prassi il numero di partite da giocare complessivamente è $n - 1$.

5. I sottoinsiemi speciali

Considerate l'insieme {1, 2, … , 151} dei primi 151 interi maggiori di zero. Tra tutti i suoi sottoinsiemi, volete sceglierne alcuni in modo che l'intersezione fra due qualunque di quelli che avete scelto sia costituita o da un numero solo o da una sequenza di numeri consecutivi (condizione soddisfatta, ad esempio, da entrambe le coppie di sottoinsiemi ({1, 2}, {2, 3}) e ({1, 2, 3}, {2, 3, 4}), ma non dalle coppie ({1, 2}, {3, 4}) o ({1, 2, 4}, {2, 3, 4})). Quanti sottoinsiemi potete scegliere al massimo?

Risposta: 5776
Per ogni sottoinsieme A che non sia formato esclusivamente da interi consecutivi, si consideri il sottoinsieme A' formato da tutti gli interi compresi fra il più piccolo e il più grande elemento di A, estremi inclusi: è chiaro che A e A' non possono essere scelti entrambi ed è facile vedere che, se A e B sono sottoinsiemi diversi scelti, anche A' e B' sono diversi e possono essere scelti. È dunque sufficiente limitarsi a considerare sottoinsiemi formati esclusivamente da interi consecutivi. Limitandoci a lavorare con tali sottoinsiemi, l'intersezione di tutti sottoinsiemi scelti non può essere vuota, ma, per massimizzare il numero delle scelte possibili, deve essere costituita da un solo elemento: altrettanto chiaramente conviene che questo elemento sia l'elemento centrale dell'insieme di partenza, dunque 76. Ora possiamo scegliere come sottoinsiemi tutti e soli quelli costituiti da stringhe di interi consecutivi che contengano tutte 76: il loro numero è ovviamente il prodotto fra il numero degli interi positivi minori o uguali a 76 e il numero di quelli maggiori o uguali a, dunque $76^2 = 5776$.

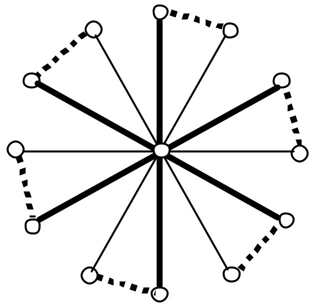
6. Trova la frazione

Il numeratore e il denominatore di una frazione sono entrambi numeri interi maggiori di zero e la loro somma non supera 103; il valore della frazione è il più alto possibile compatibilmente con il fatto di essere strettamente minore di 1/3.
Scrivete nell'ordine prima il numeratore e poi il denominatore della frazione.

Risposta: 2576
Potendo usare solo numeri interi (positivi), se n è il numeratore di una frazione il cui valore è il più alto possibile compatibilmente con il fatto di essere strettamente minore di 1/3, il denominatore deve essere $3n + 1$. Tenuto conto del fatto che il valore della frazione $n/(3n + 1)$ cresce al crescere di n (è facile verificare questa affermazione), si tratta dunque di trovare il più grande intero n per cui si ha $n + 3n + 1 = 4n + 1 = 103$. Tale intero è chiaramente 25.

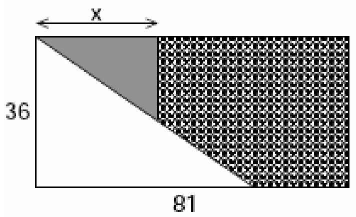
7. I mezzi di trasporto

In una strana nazione vi sono 13 città che possono essere collegate tra loro da uno o più dei seguenti mezzi di trasporto: autobus, treno, aereo. Il presidente, il vice-presidente e il primo ministro devono poter visitare ogni città, ma ciascuno dei tre si rifiuta di usare uno dei tre mezzi: il presidente l'autobus, il vice-presidente il treno e il primo ministro l'aereo. Qual è il più piccolo numero di collegamenti fra le varie città che occorre predisporre per soddisfare tutte le esigenze?

Risposta: 0018

18 collegamenti complessivi sono sufficienti: la figura (che va intesa solo come schema delle possibili connessioni, indipendentemente dalla posizione geografica delle città) spiega come possono essere realizzati (i tre diversi tipi di tratti corrispondono ai tre diversi tipi di collegamenti possibili).
Un numero inferiore di collegamenti non è sufficiente. Infatti, per rendere connesso un insieme di 13 punti distinti, servono almeno 12 segmenti: allora se ogni città dovesse essere connessa a qualche altra da tutti i tre mezzi disponibili, servirebbero almeno $3 \times 12 = 36$ collegamenti. Nel nostro caso ogni città deve essere raggiunta da almeno una coppia di collegamenti: ogni mezzo disponibile entra in due delle coppie di mezzi possibili, dunque i collegamenti non possono essere meno di $36 : 2 = 18$.

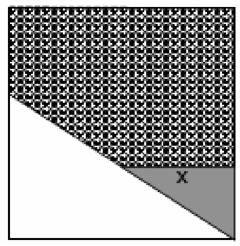
8. Il rettangolo diventa un quadrato

La figura mostra le linee lungo le quali Marco ha tagliato un rettangolo di cartoncino, i cui lati misuravano 36 e 81 centimetri, ottenendo due triangoli e un pentagono. Accostando opportunamente i tre pezzi ricavati, Marco ha potuto realizzare un quadrato. Quanti centimetri è lungo il segmento indicato con x?



Risposta: 0027

Il lato del quadrato deve valere, in centimetri, la radice quadrata di 36×81, dunque $6 \times 9 = 54$. L'unico lato del pentagono che può essere lungo 54 centimetri è quello contenuto nel lato superiore del rettangolo: si evince allora che deve essere $81 - x = 54$, da cui $x = 27$. La figura mostra l'accostamento dei tre pezzi che ha consentito a Marco di ottenere il quadrato.



9. Numeri dispettosi

Diciamo che un numero intero positivo è *"dispettoso"* se diviso per 6 dà resto 5 e diviso per 8 dà resto 7. Trovate i primi due numeri dispettosi e scriveteli nell'ordine (per esempio, se fossero 65 e 86 dovreste scrivere 6586).

Risposta: 2347

Certamente $6 \times 8 - 1 = 47$ è dispettoso. Una facile verifica mostra che non è il primo: prima di 47 c'è (solo) 23.

10. Quante pretese!

Stai cercando tutti i numeri interi positivi di quattro cifre ciascuno dei quali goda di tutte le seguenti proprietà:

- le cifre che lo compongono devono essere tutte diverse fra loro;
- deve essere un multiplo di 5;
- se si sopprime la cifra delle migliaia, il numero di tre cifre che resta deve essere un multiplo di 9;
- se si sopprime la cifra delle centinaia, il numero di tre cifre che resta deve essere un multiplo di 11;
- se si sopprime la cifra delle decine, il numero di tre cifre che resta deve essere un multiplo di 7.

Trova la loro somma.

Risposta: 9080

Sia ABCD la rappresentazione decimale di uno dei numeri richiesti.

i) La divisibilità per 5 impone che sia $D = 0$ o $D = 5$.
ii) La divisibilità per 9 di BCD impone che $B + C + D$ sia un multiplo di 9.
iii) La divisibilità per 11 di ACD impone che $A - C + D$ sia un multiplo di 11.
iv) La divisibilità per 7 di ABD impone che $AB - 2D$ sia un multiplo di 7.

La condizione iii) consente di scartare la possibilità $D = 0$, in quanto imporrebbe $A = C$, da escludere perché le cifre devono essere tutte diverse fra loro. Allora $D = 5$. Combinando ii) e iii) si ottiene facilmente che deve essere o $A + B = 8$ e $A - C = -5$ o $A + B = 10$ e $A - C = 6$.

La condizione iv) allora assegna come unici valori possibili per AB i numeri 17 e 73: il primo fornisce solo 1765, il secondo solo 7315.

11. Le porte

In un lunghissimo corridoio ci sono 1.000 porte numerate da 1 a 1.000 che inizialmente sono chiuse. All’inizio del corridoio ci sono 1.000 persone, numerate da 0 a 999, che agiscono come segue. La persona 0 percorre il corridoio dall’inizio e modifica lo stato di tutte le porte (dunque le apre tutte). Dopo di lei, la persona 1 percorre il corridoio dall’inizio: salta una porta (la prima) e modifica lo stato della seconda (in questo caso la chiude), quindi salta la terza e modifica lo stato della quarta e così via. Dopo di lei, la persona 2 percorre il corridoio dall’inizio saltando ordinatamente 2 porte su 3 (cioè la prima e la seconda, la quarta e la quinta e così via) e cambia lo stato delle porte che non salta. Si procede in questo modo: la persona *n* per corre il corridoio dall’inizio saltando ordinatamente *n* porte su *n* + 1 e cambiando lo stato di quelle che non salta (cioè aprendo quelle che trova chiuse e chiudendo quelle che trova aperte). Quando anche la millesima persona avrà compiuto il proprio percorso, quante saranno le porte rimaste aperte?

Risposta: 0031
Qualunque sia *n*, la porta n viene cambiata di stato tante volte quanti sono i divisori, propri o impropri, di *n*. Inizialmente le porte sono tutte chiuse: quelle che alla fine rimarranno aperte sono allora quelle identificate da un intero *n* con un numero dispari di divisori. Se *p* è un divisore di *n*, anche *n*/*p* è un divisore di *n* ed è certamente diverso da *p* se *n* non è un quadrato perfetto: allora ogni intero che non sia un quadrato perfetto ha un numero pari di divisori, mentre ogni quadrato perfetto ne ha un numero dispari. I quadrati perfetti compresi fra 1 e 1.000 sono 31 (infatti si ha $31^2 = 961$, mentre $32^2 = 1.024$).

12. La griglia

			A

In ogni cella della griglia 3 × 4 in figura vuoi sistemare un numero intero positivo rispettando tutte le seguenti regole:
- i numeri devono essere tutti diversi fra loro;
- in ogni riga ogni numero dal secondo (da sinistra) in poi è un multiplo del precedente;
- in ogni colonna ogni numero dal secondo (dall’alto) in poi è un multiplo del precedente.

Qual è il più piccolo numero che può comparire nella cella indicata con *A*?

Risposta: 0072
È ovvio che nella cella che appartiene alla prima riga e alla prima colonna conviene sistemare il numero 1. Il numero cercato deve essere il prodotto di 5 numeri primi eventualmente in parte coincidenti, ma non del tutto, altrimenti i prodotti di gruppi di questi fattori non possono essere tutti distinti: in particolare i fattori che si distribuiscono sulla prima riga dovranno essere distinti da quelli che si distribuiscono sulla prima colonna. Il più piccolo numero di questo tipo è $2^3 3^2=72$.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

13. Anna e il suo cane

Anna sta passeggiando con il suo cane su una pista circolare che contorna un laghetto. La pista è lunga 500 metri. Ad un certo istante il cane inizia a correre alla velocità di 10 Km all'ora; Anna lo insegue correndo alla velocità di 8 Km all'ora. Quando la distanza fra il cane e Anna è diventata di 250 metri, Anna inverte il verso della sua corsa, con l'intenzione di recuperare il cane (che invece continua a correre nello stesso verso) correndogli incontro. Se le velocità del cane e di Anna rimangono le stesse, per quanti secondi Anna starà separata dal suo cane?

Risposta: 0500

Per distanziare Anna di 250 metri il cane, correndo ad una velocità di 2 Km all'ora superiore a quella di Anna, impiega lo stesso tempo che occorre per percorrere 250 metri a 2 Km all'ora, cioè 1/8 di ora che corrisponde a 450 secondi. Quando Anna inverte il verso della sua corsa, la distanza che la separa dal cane è 500 – 250 = 250 metri: da questo istante però i due corrono uno incontro all'altro, quindi si incontreranno dopo il tempo necessario a percorrere tale distanza a una velocità che è la somma delle due velocità, 18 Km all'ora. Per il ricongiungimento serviranno dunque altri $3600/(4 \times 18) = 50$ secondi.

14. L'elezione del sindaco

A Kangcity si è svolto il ballottaggio fra Peter e Max per l'elezione alla carica di sindaco ed è in corso lo spoglio delle schede. Tutte le schede consegnate sono valide e non bianche. Per ogni numero intero k compreso fra 0 e 100, quando k% delle schede sono state scrutinate la commissione comunica l'esito del voto fino a quel momento. Quando, per un certo numero intero n, n% delle schede sono state scrutinate, Peter ha ottenuto il 62% dei voti scrutinati e Max il 38%: questo è il primo momento in cui Peter è sicuro di essere il nuovo sindaco. Quanto vale n?

Risposta : 0081

Peter è sicuro di essere eletto quando avrebbe comunque la maggioranza, anche se tutte le schede che rimangono da scrutinare fossero per Max. Nella nostra situazione dunque deve essere

$$(62/100) \times n/100 > 38/100 \times n/100 + (100 - n)/100,$$

cioè $n > 10.000/124$: il primo intero n che soddisfa questa disuguaglianza è 81.

15. Una frazione da semplificare

Qual è il valore della frazione $\dfrac{1001+1003+1005+\ldots+1997+1999}{1+3+5+\ldots+997+999}$?

Risposta: 0003

Indichiamo provvisoriamente con S la somma degli interi dispari da 1 a 999 inclusi. Gli addendi del numeratore sono in numero di 1000/2 = 500, per cui il numeratore vale $500 \times 1000 + S$; allora la frazione vale $1 + 500 \times 1000/S$. Per calcolare S, osserviamo che S coincide con la somma degli interi da 1 a 1.000 inclusi meno la somma degli interi pari da 1 a 1.000 inclusi: si ha dunque

$S = 1000 \times 1001 / 2 - 2(500 \times 501)/2 = (500)^2$. La nostra frazione vale allora 1 + 2 = 3.