Kangourou della Matematica 2008
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 12 maggio 2008

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Le elezioni del sindaco di Kanguria si svolgono ogni 4 anni. Gli elettori possono esercitare il loro diritto di voto in un solo giorno.
Quattro anni fa l'affluenza degli elettori alle urne rilevata alle ore 13 è stata del 20% degli aventi diritto mentre alla fine è stata del 70%.
Quest'anno l'affluenza registrata alle 13 è stata del 24%. Quale sarà l'affluenza finale se le abitudini della popolazione non sono cambiate e ci si può aspettare dalla popolazione per cui è comodo votare nel pomeriggio lo stesso interesse al voto mostrato dalla popolazione per cui è comodo votare al mattino?

C2. (*7 punti*) Supponi di aver estratto a caso dieci numeri interi positivi: puoi sempre sceglierne alcuni in modo che, intercalando opportunamente tra quelli scelti i segni di somma o differenza, il risultato dell'operazione sia un numero divisibile per 10?
Se sì come? se no perché?

C3. (*11 punti*) Nella griglia sottostante non si può eliminare il simbolo "=", ma si possono eliminare due caselle, in modo che l'uguaglianza che ne risulta sia verificata.
Scrivi tale uguaglianza e spiega come mai quella trovata è l'unica soluzione possibile.

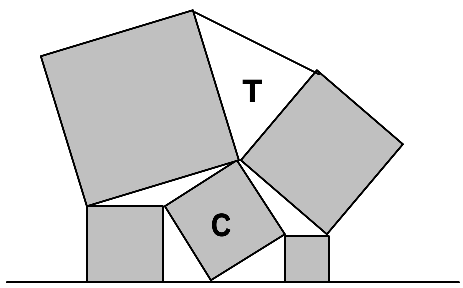
1	7	3	x	(	4	5	+	2	4	)	=	2	0	0	7	+	3	7

C4. (*14 punti*) Chiama IMPERFETTO un insieme A di numeri interi positivi tale che
- sia composto da infiniti numeri
- comunque tu scelga un sottoinsieme finito B di tale insieme la somma dei numeri di B non sia mai il quadrato di un numero intero.

Trova almeno un insieme IMPERFETTO.

C5. (*18 punti*) È dato un insieme di 999 elementi. Mostra che i suoi sottoinsiemi formati da un numero dispari di elementi sono tanti quanti quelli formati da un numero pari di elementi. Mostra quindi che la stessa cosa è vera per un insieme di 1000 elementi.
(Attenzione: sia l'insieme dato sia l'insieme vuoto sono da considerarsi fra i sottoinsiemi, quello vuoto ovviamente formato da un numero pari di elementi).

C6. (*22 punti*) Cinque quadrati sono disposti come in figura: nota in particolare che esiste una retta che ospita un lato di ciascuno dei due quadrati più piccoli e un vertice del quadrato C.
Quanto vale il rapporto tra l'area del triangolo T e quella del quadrato C ?



Kangourou della Matematica 2008
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 12 maggio 2008

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Le elezioni del sindaco di Kanguria si svolgono ogni 4 anni. Gli elettori possono esercitare il loro diritto di voto in un solo giorno.
Quattro anni fa l'affluenza degli elettori alle urne rilevata alle ore 13 è stata del 20% degli aventi diritto mentre alla fine è stata del 70%.
Quest'anno l'affluenza registrata alle 13 è stata del 24%. Quale sarà l'affluenza finale se le abitudini della popolazione non sono cambiate e ci si può aspettare dalla popolazione per cui è comodo votare nel pomeriggio lo stesso interesse al voto mostrato dalla popolazione per cui è comodo votare al mattino?

Soluzione: l'84% degli aventi diritto al voto.
L'incremento di affluenza alle 13 rispetto a 4 anni fa è stato di (24-20)/20, cioè del 20%. Lo stesso incremento percentuale a fine giornata porterà l'affluenza all'84%.

C2. (*7 punti*) Supponi di aver estratto a caso dieci numeri interi positivi: puoi sempre sceglierne alcuni in modo che, intercalando opportunamente tra quelli scelti i segni di somma o differenza, il risultato dell'operazione sia un numero divisibile per 10?
Se sì come? se no perché?

Soluzione: sì.
Se i numeri hanno le cifre delle unità tutte diverse si può fare ad esempio la somma dei numeri che hanno ultime cifre 1 e 9; in caso contrario basta fare la differenza dei due numeri con la stessa ultima cifra.

C3. (*11 punti*) Nella griglia sottostante non si può eliminare il simbolo "=", ma si possono eliminare due caselle, in modo che l'uguaglianza che ne risulta sia verificata.
Scrivi tale uguaglianza e spiega come mai quella trovata è l'unica soluzione possibile.

1	7	3	x	(	4	5	+	2	4	)	=	2	0	0	7	+	3	7

Soluzione:

1	7	3	x	(	4	5	+	2	4	)	=	2	0	0	7	+	3	7

Spiegazione: 173x(45+24)=173x69=11937: troppo alto per poter eliminare due caselle dopo l'uguale se si tiene il simbolo +, troppo basso se lo si rimuove. Togliendo una casella al primo membro non si arriva neanche a 12000, quindi non si può comunque pensare di togliere + al secondo e quindi ci possiamo aspettare che il risultato abbia l'ordine di grandezza di 2000. Ora 173x24 è già maggiore di 4000 e quindi non basta depennare una delle cifre di 45+24: bisogna togliere una delle cifre di 173.
17x69=1173 è troppo poco e a maggior ragione lo sarebbe 13x69, mentre 73x69=5037 è più del doppio: sembra quindi necessario togliere una delle cifre in 45+24.
Quindi il risultato deve essere 2007+37=2044 e visto che 2044:73=28, si deve rimuovere il 5.

C4. (*14 punti*) Chiama IMPERFETTO un insieme A di numeri interi positivi tale che

- sia composto da infiniti numeri
- comunque tu scelga un sottoinsieme finito B di tale insieme la somma dei numeri di B non sia mai il quadrato di un numero intero.

Trova almeno un insieme IMPERFETTO.

Soluzione: ad esempio A = $\{2^{2k+1}$, k intero positivo$\}$ (o un suo sottoinsieme infinito).
Infatti sia B un sottoinsieme finito di A. Detto m il minimo dei valori di k tali che 2^{2k+1} appartenga a B, la somma N di tutti i numeri dell'insieme B si può esprimere nella forma $2^{2m+1}(1+H)$, dove H è somma di potenze di 2, tutte con esponente intero pari. Ne segue che N non può essere un quadrato perfetto: infatti la somma tra parentesi è un numero dispari, per cui il fattore 2 compare in N un numero dispari di volte. È facile persuadersi del fatto che, nella nostra costruzione di A, 2 può essere sostituito da qualunque altro numero primo.
ATTENZIONE. Non sono insiemi IMPERFETTI gli insiemi sotto elencati, che sono stati esibiti come tali da alcuni concorrenti nello svolgimento della gara:

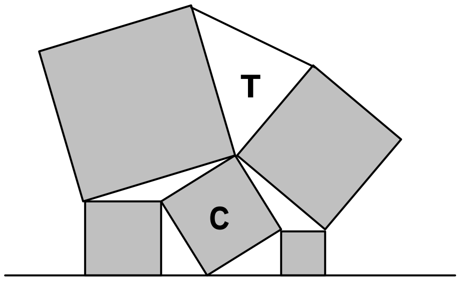
- $\{1 + 2k\}$. Preso B = $\{13, 17, 33, 37\}$, si ha $13 + 17 + 33 + 37 = 100 = 10^2$
- $\{k^2 - 1\}$. Preso B = $\{(3^2 - 1), (5^2 - 1), (15^2 - 1)\}$, si ha $8 + 24 + 224 = 256 = 16^2$
- $\{10 + 50k\}$. Preso B = $\{(10 + 50), (10 + 100), (10 + 150), (10 + 200), (10 +350)\}$, la somma degli elementi è $10x5 + 50 + 100 + 200 + 150 + 350 = 900 = 30^2$.

C5. (*18 punti*) È dato un insieme di 999 elementi. Mostra che i suoi sottoinsiemi formati da un numero dispari di elementi sono tanti quanti quelli formati da un numero pari di elementi. Mostra quindi che la stessa cosa è vera per un insieme di 1000 elementi.
(Attenzione: sia l'insieme dato sia l'insieme vuoto sono da considerarsi fra i sottoinsiemi, quello vuoto ovviamente formato da un numero pari di elementi).

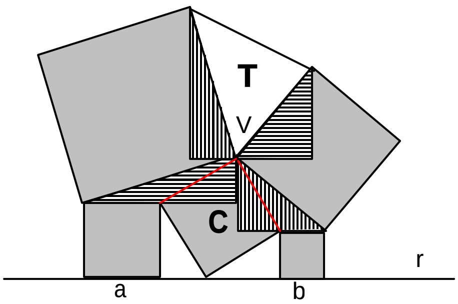
Soluzione
Consideriamo dapprima l'insieme formato da 999 elementi. Per ogni suo sottoinsieme formato da un numero dispari di elementi, il complementare è univocamente individuato ed è formato da un numero pari di elementi, e viceversa. Le due "famiglie di sottoinsiemi" sono dunque in corrispondenza biunivoca.

Chiamiamo ora A l'insieme di 1000 elementi e sia B un suo sottoinsieme formato da 999 elementi. L'insieme A è esprimibile come unione dell'insieme B con il sottoinsieme formato dal solo elemento scartato: chiamiamo x questo elemento. La famiglia dei sottoinsiemi di B è in corrispondenza biunivoca con quella dei sottoinsiemi di A che non contengono x, e per questi si è già visto che le due famiglie, chiamiamole brevemente "pari" e "dispari", sono equipotenti; d'altra parte i restanti sottoinsiemi di A si ottengono da quelli di B aggiungendo x: così i sottoinsiemi che contenevano un numero pari di elementi si trasformano in sottoinsiemi che ne contengono un numero dispari e viceversa, e quindi si hanno ancora famiglie equipotenti di sottoinsiemi.

C6. (*22 punti*) Cinque quadrati sono disposti come in figura: nota in particolare che esiste una retta che ospita un lato di ciascuno dei due quadrati più piccoli e un vertice del quadrato C.
Quanto vale il rapporto tra l'area del triangolo T e quella del quadrato C ?



Soluzione: 1, cioè le due aree sono uguali.
Osserviamo che tra la retta r su cui appoggiano i due quadrati più piccoli, questi stessi quadrati e il quadrato C si formano due triangoli rettangoli, che sono congruenti poiché hanno ugual ipotenusa (il lato del quadrato C) e poiché gli angoli formati dalla retta r con i lati del quadrato C che intersecano r sono complementari. Dette a e b le misure dei cateti dei due triangoli rettangoli, l'area di C misura a^2+b^2 (teorema di Pitagora).



Ora consideriamo il trapezio rettangolo con basi perpendicolari alla retta r, lato parallelo a r passante per il vertice V che T ha in comune con tre quadrati e lato obliquo congiungente i vertici dei due quadrati più grandi. Ciascuno dei due triangoli rettangoli che restano dopo aver rimosso dal trapezio il triangolo T è uguale a quello avente per ipotenusa l'altro lato dello stesso quadrato passante per il vertice V e cateti rispettivamente parallelo e perpendicolare a r. È facile vedere che questi triangoli hanno lati di lunghezza uno 2a e b, l'altro 2b e a e quindi le basi del trapezio misurano 2a e 2b, mentre l'altezza misura a + b.
Dunque l'area del trapezio è $(2a + 2b)(a + b)/2$ e quella di T è pari a

$$(a + b)^2 - (2ab + 2ba)/2 = a^2+b^2.$$