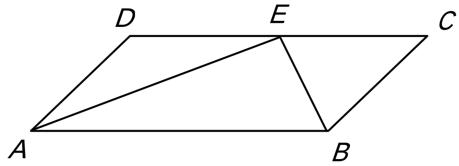
Kangourou della Matematica 2007
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2007

LIVELLO BENJAMIN

B1. (*5 punti*) Se il parallelogramma *ABCD* ha area 7 cm^2, e il triangolo *EBC* ha area 2 cm^2, quanto misura l'area del triangolo *ADE* in figura?



B2. (*7 punti*) Puoi appoggiare 15 monete uguali su un tavolo in modo che "formino un triangolo equilatero" (vedi figura), ma non puoi farlo in modo che "formino un quadrato" (manca una moneta). Qual è il minimo numero di monete con cui puoi formare sia un triangolo sia un quadrato?

B3. (*11 punti*) In una classe in cui ci sono almeno due maschi e due femmine, ogni ragazzo stringe una volta la mano a ogni ragazza. In totale sono state effettuate 91 strette di mano. Se i maschi sono meno delle femmine, quanti sono gli allievi maschi di quella classe?

B4. (*14 punti*) Reagendo tra loro, tre tipi di molecole X, Y e Anti-X si comportano in questo modo:

- se una molecola di X incontra una di Y, si forma una molecola di Anti-X che le sostituisce;
- se una molecola di Anti-X incontra una di Y, si forma una molecola di X che le sostituisce;
- se una molecola di X e una di Anti-X si incontrano, esse esplodono, spariscono e liberano energia.

Naturalmente, nessuna molecola reagisce con molecole dello stesso tipo!
Quattro molecole di X, due di Y e cinque di Anti-X reagiscono tra loro in modo tale che alla fine rimane una molecola sola. Possiamo indovinare di quale tipo è?
[*Attenzione: se rispondi positivamente, devi mostrare che non si può attenere un altro risultato; in caso contrario, devi indicare due procedimenti ciascuno dei quali permetta di produrre una sola molecola e le due molecole prodotte siano diverse*].

B5. (*18 punti*) Il professore di educazione tecnica ha chiesto di costruire un triangolo di perimetro 27 cm, con questi requisiti:

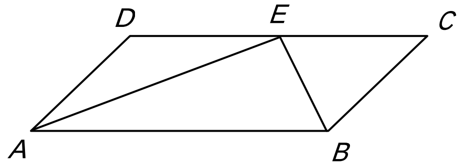
- i lati devono misurare un numero intero di centimetri,
- le misure dei lati devono essere tre numeri tutti diversi tra loro.

Quanti differenti triangoli possono consegnargli i suoi alunni, se consideri uguali due triangoli quando per ogni lato di uno dei due c'è un lato dell'altro che ha la stessa misura?

B6. (*22 punti*) Ho in tasca delle caramelle tutte diverse tra loro e il numero dei modi in cui posso sceglierne tre è il doppio del numero dei modi in cui posso sceglierne due. Quante caramelle ho in tasca?

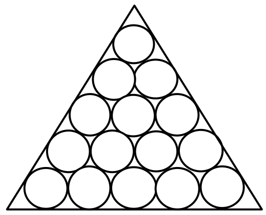
LIVELLO BENJAMIN

B1. (*5 punti*) Se il parallelogramma *ABCD* ha area 7 cm^2, e il triangolo *EBC* ha area 2 cm^2, quanto misura l'area del triangolo *ADE* in figura?



Soluzione: 1,5 cm^2. Infatti l'area del triangolo *AEB* misura metà dell'area del parallelogramma, avendo la sua stessa base ed altezza.

B2. (*7 punti*) Puoi appoggiare 15 monete uguali su un tavolo in modo che "formino un triangolo equilatero" (vedi figura), ma non puoi farlo in modo che "formino un quadrato" (manca una moneta). Qual è il minimo numero di monete con cui puoi formare sia un triangolo sia un quadrato?



Soluzione: 36.

Ad ogni fila di monete che si aggiunge nella configurazione a triangolo, il numero di monete aggiunte viene incrementato di 1: quindi il numero di monete che compare in una configurazione a triangolo, lungo i cui lati ci siano *n* monete, è la somma dei primi *n* numeri interi positivi (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...). Tra queste somme, la prima che sia un quadrato perfetto è 36.

B3. (*11 punti*) In una classe in cui ci sono almeno due maschi e due femmine, ogni ragazzo stringe una volta la mano a ogni ragazza. In totale sono state effettuate 91 strette di mano. Se i maschi sono meno delle femmine, quanti sono gli allievi maschi di quella classe?

Soluzione: 7.
Se indichiamo con N il numero di ragazze che ci sono in classe, ogni ragazzo effettua N strette di mano: quindi il numero di strette di mano è il prodotto del numero dei ragazzi per N. Ora, 91 può essere visto come prodotto di due numeri interi solo in due modi (a meno dell'ordine dei fattori): 91x1 e 7x13. Dal momento che nella classe ci sono almeno due maschi e due femmine, 7x13 è il solo caso che fa per noi: quindi gli allievi maschi sono 7.

B4. (*14 punti*) Reagendo tra loro, tre tipi di molecole X, Y e Anti-X si comportano in questo modo:

- se una molecola di X incontra una di Y, si forma una molecola di Anti-X che le sostituisce;
- se una molecola di Anti-X incontra una di Y, si forma una molecola di X che le sostituisce;
- se una molecola di X e una di Anti-X si incontrano, esse esplodono, spariscono e liberano energia.

Naturalmente, nessuna molecola reagisce con molecole dello stesso tipo!
Quattro molecole di X, due di Y e cinque di Anti-X reagiscono tra loro in modo tale che alla fine rimane una molecola sola. Possiamo indovinare di quale tipo è?
[*Attenzione: se rispondi positivamente, devi mostrare che non si può attenere un altro risultato; in caso contrario, devi indicare due procedimenti ciascuno dei quali permetta di produrre una sola molecola e le due molecole prodotte siano diverse*].

Soluzione: Sì, è Anti-X.
Vediamo innanzi tutto che è possibile rimanere con una sola molecola. Infatti, se le 4 molecole di X reagiscono ciascuna con una molecola di Anti-X, restano una molecola di Anti-X e due di Y: quindi si forma una molecola di X che, con quella restante di Y, dà una molecola di Anti-X.
Non è possibile rimanere solo con una molecola di Y: infatti la reazione dell'altra con X o Anti–X non permetterebbe l'eliminazione di tutte le molecole di X e Anti–X.
Non è possibile rimanere solo con una molecola di X. Infatti il risultato della reazione di una molecola di Y con una delle altre molecole è di far diminuire di 1 il numero di molecole di una delle due famiglie (X o Anti-X) e contemporaneamente aumentare di 1 il numero di molecole dell'altra: quindi, dopo la reazione con due molecole di Y, o rimangono inalterati entrambi i numeri o aumenta di due il numero di elementi di una famiglia e diminuisce di due quello dell'altra.
N.B. Non è importante l'ordine in cui le reazioni avvengono!

B5. (*18 punti*) Il professore di educazione tecnica ha chiesto di costruire un triangolo di perimetro 27 cm, con questi requisiti:

- i lati devono misurare un numero intero di centimetri,
- le misure dei lati devono essere tre numeri tutti diversi tra loro.

Quanti differenti triangoli possono consegnargli i suoi alunni, se consideri uguali due triangoli quando per ogni lato di uno dei due c'è un lato dell'altro che ha la stessa misura?

Soluzione: 12.
Tra le partizioni del numero 27 in numeri interi distinti (e positivi), sono accettabili solo quelle in cui ogni numero è minore della somma degli altri due (quindi si escludono terne contenenti numeri maggiori di 13) e maggiore della loro differenza. Conviene elencare le terne a partire dal numero più piccolo, controllando che la differenza degli altri due non ne sia maggiore:
[2,12,13], [3,11,13], [4,11,12], [4,10,13], [5,10,12], [5,9,13], [6,10,11], [6,9,12], [6,8,13], [7,9,11], [7,8,12], [8,9,10]. Si escludono invece le terne [1,13,13], [3,12,12], [5,11,11], [7,10,10], [7,7,13], [8,8,11], [9,9,9] in quanto contenenti coppie o terne di numeri uguali.

B6. (*22 punti*) Ho in tasca delle caramelle tutte diverse tra loro e il numero dei modi in cui posso sceglierne tre è il doppio del numero dei modi in cui posso sceglierne due. Quante caramelle ho in tasca?

Soluzione: 8**.**
Proponiamo una motivazione accessibile al livello Benjamin.
Si può procedere così. Incominciamo ad esaminare il caso in cui ho tre caramelle A, B, C: posso sceglierne 2 in tre modi diversi (AB, AC, BC) e 3 in un solo modo (ABC).
Se ho quattro caramelle A, B, C, D posso sceglierne 2 in 6 modi diversi (AB, AC, AD, BC, BD, CD) e 3 in 4 modi diversi: uno come in precedenza (ABC) e gli altri 3 associando D a ciascuna delle coppie AB, AC, BC che posso formare con le altre tre caramelle.
Nel passaggio da 3 a 4 caramelle,

- il numero di modi di sceglierne due è aumentato esattamente di 3, cioè del numero di caramelle che avevo inizialmente
- il numero di modi di sceglierne tre è aumentato di 3, cioè del numero di modi che avevo di scegliere 2 caramelle tra tre.

La motivazione di questo fatto è visualizzata dallo schema seguente

	Due scelte			Totale modi	Tre scelte			Totale modi
Tre caramelle	AB	AC			ABC			
		BC						
				3				1
Quattro caramelle	AB	AC	**AD**		ABC	**ABD**	**ACD**	
		BC	**BD**				**BCD**	
			CD					
				3+3				1+3

Iterando questo ragionamento,

- con cinque caramelle avrò 6+4=10 coppie e 4+6=10 terne
- con sei caramelle avrò 10+5=15 coppie e 10+10=20 terne

e così via fino a otto caramelle per le quali avrò 28 coppie e 56 terne.