



Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006

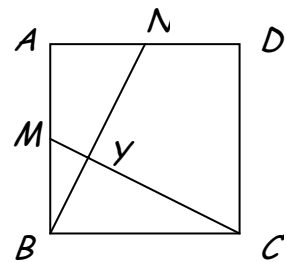


LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Le lettere della parola "MELA" sono tutte distinte fra loro. Fa corrispondere ad ogni lettera di questa parola una cifra in modo tale che la parola "MELA" rappresenti il più piccolo numero di quattro cifre tutte distinte tra loro. Mantenendo questa scelta delle cifre, che numero è rappresentato dalla parola "MALE"?

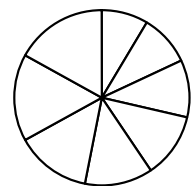
B2. (7 punti) Qual è la somma dei primi 40 numeri della sequenza: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...? (La regola con cui è costruita la sequenza è la seguente: ogni numero intero positivo, a partire da 1, viene ripetuto consecutivamente tante volte quale è il suo valore.)

B3. (11 punti) Osserva la figura: $ABCD$ è un quadrato, M è il punto medio di AB ed N è il punto medio di DA . I segmenti CM e BN si incrociano in Y . Quanto misura l'angolo NYC ? Perché?



B4. (14 punti) Quanti sono i numeri di 3 cifre (significative, cioè la cui prima cifra non sia 0), tali che 2 di esse comunque prese non differiscano per meno di 4?

B5. (18 punti) Un cerchio è stato diviso in un certo numero di spicchi (almeno 4), ad esempio come in figura. Sei stato incaricato di colorare l'interno di ogni spicchio in modo che tra due spicchi di ugual colore ce ne siano sempre almeno due di colore diverso, ma non conosci il numero degli spicchi del cerchio (quello in figura è solo un esempio!). Qual è il più piccolo numero di colori che ti garantirà di riuscirci, indipendentemente dal numero degli spicchi?



(Ti suggeriamo di calcolare preliminarmente il minimo numero di colori sufficiente in ciascuno dei seguenti casi: gli spicchi sono 4, gli spicchi sono 5 e così via fino a 8.)

B6. (22 punti) Nell'operazione indicata a lato ogni lettera rappresenta una cifra: lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse; inoltre nessuna lettera rappresenta la cifra 0. Quanto vale il risultato?

$$\begin{array}{r} \text{ORE} + \\ \text{ORE} + \\ \hline \text{ORE} = \\ \text{VIVE} \end{array}$$



Kangourou della Matematica 2006
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 8 maggio 2006



LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Le lettere della parola "MELA" sono tutte distinte fra loro. Fa corrispondere ad ogni lettera di questa parola una cifra in modo tale che la parola "MELA" rappresenti il più piccolo numero di quattro cifre tutte distinte tra loro. Mantenendo questa scelta delle cifre, che numero è rappresentato dalla parola "MALE"?

Soluzione: 1320.

Infatti il più piccolo numero di 4 cifre con cifre tutte distinte fra loro (come le lettere di MELA) è 1023. Se $MELA = 1023$, allora $MALE = 1320$.

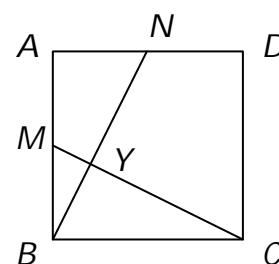
B2. (7 punti) Qual è la somma dei primi 40 numeri della sequenza: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...? (La regola con cui è costruita la sequenza è la seguente: ogni numero intero positivo, a partire da 1, viene ripetuto consecutivamente tante volte quale è il suo valore.)

Soluzione: 240.

La somma dei primi 8 numeri interi $1+2+\dots+8$ vale 36; visto che ogni numero è rappresentato nella sequenza tante volte quanto esso vale, si deduce che gli ultimi quattro elementi della sequenza sono quattro 9.

$$\begin{aligned} 1+ 2+2 + 3+3+3 + 4+4+4+4 + 5+5+5+5+5 + 6+6+6+6+6+6 + 7+7+7+7+7+7+7 + \\ + 8+8+8+8+8+8+8+8 + 9+9+9+9 = 1+4+9+16+25+36+49+64+36 = \\ = 30+25+100+85 = 240 \end{aligned}$$

B3. (11 punti) Osserva la figura: $ABCD$ è un quadrato, M è il punto medio di AB ed N è il punto medio di DA . I segmenti CM e BN si incrociano in Y . Quanto misura l'angolo NYC ? Perché?



Soluzione: 90 gradi.

I triangoli rettangoli NAB e MBC sono congruenti (avendo cateti a due a due di ugual misura): in particolare l'angolo BNA misura come l'angolo CMB e l'angolo ABN come l'angolo BCM . Il triangolo BYM è allora simile ai triangoli NAB e MBC : quindi l'angolo BYM è retto e così pure l'angolo NYC .

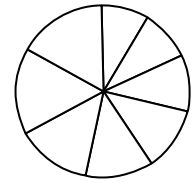
B4. (14 punti) Quanti sono i numeri di 3 cifre (significative, cioè la cui prima cifra non sia 0), tali che 2 di esse comunque prese non differiscano per meno di 4?

Soluzione: 18.

Le terne di cifre in questione sono (1,5,9) (0,4,8) (0,4,9) (0,5,9) e le disposizioni ammissibili sono 6 per la prima terna e 4 per ciascuna delle altre: si ottengono così 18 numeri di tre cifre. Possiamo elencarli:

159, 195, 519, 591, 915, 951; 408, 480, 804, 840; 409, 490, 904, 940; 509, 590, 905, 950.

B5. (18 punti) Un cerchio è stato diviso in un certo numero di spicchi (almeno 4), ad esempio come in figura. Sei stato incaricato di colorare l'interno di ogni spicchio in modo che tra due spicchi di ugual colore ce ne siano sempre almeno due di colori diversi, ma non conosci il numero degli spicchi del cerchio (quello in figura è solo un esempio!). Qual è il più piccolo numero di colori che ti garantirà di riuscirci, indipendentemente dal numero degli spicchi?



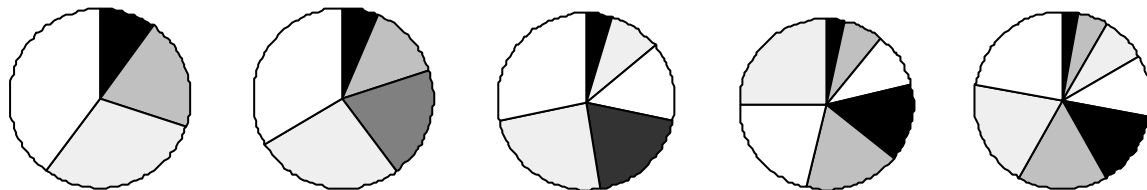
(Ti suggeriamo di calcolare preliminarmente il minimo numero di colori sufficiente in ciascuno dei seguenti casi: gli spicchi sono 4, gli spicchi sono 5 e così via fino a 8.)

Soluzione: 5.

Sia n il numero degli spicchi. Se $n = 5$ sono necessari 5 colori,

- se n è un multiplo di 3 bastano 3 colori, ordinati come ...1231231...
- se n diviso per 3 dà resto 1 (come succede con 4, 7, 10, 13, ...) bastano 4 colori, ordinati come ... 123 123 1234,
- se n diviso per 3 dà resto 2, ma è maggiore di 5 (come succede con 8, 11, 14, ...) bastano 4 colori, ordinati come ... 123 123 1234 1234.

Il disegno illustra la situazione da $n = 4$ a $n = 8$.



B6. (22 punti) Nell'operazione indicata a lato ogni lettera rappresenta una cifra: lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse; inoltre nessuna lettera rappresenta la cifra 0. Quanto vale il risultato?

$$\begin{array}{r} \text{ORE} + \\ \text{ORE} + \\ \hline \text{ORE} = \\ \text{VIVE} \end{array}$$

Soluzione: 2625.

La lettera E deve rappresentare 5 (poiché nessuna altra cifra, a parte lo 0 che non è ammesso, moltiplicata per 3 dà un numero con cifra delle unità che coincide con la cifra iniziale); la lettera V deve rappresentare 1 oppure 2 (sommando tre numeri minori di 1000 si ha comunque un numero più piccolo di 3000).

Tenuto conto del riporto 1 che si ha dalla somma delle cifre delle unità, il numero $R+R+R+1$ deve avere V come cifra delle unità: se V fosse 1, 3 volte R dovrebbe valere 10 o 20: impossibile. Dunque $V=2$ e $R+R+R=21$, cioè $R=7$.

Inoltre si ha riporto 2 e quindi 3 volte O sommato a 2 deve dare un numero più grande di 20: quindi O non può valere 6 (la somma varrebbe esattamente 20), non può valere 7 (che è il valore già impegnato per R), non può valere 9 poiché in tal caso anche I dovrebbe valere 9.

Invece, se O vale 8, si ha che I vale 6 e tutte le richieste sono rispettate:

$$\begin{array}{r} 875 + \\ 875 + \\ \hline 875 = \\ 2625 \end{array}$$

Il ragionamento illustrato dimostra che il problema ammette la sola soluzione trovata.