Kangourou Italia
Gara del 17 marzo 2005
Categoria Student
Per studenti di quarta o quinta superiore

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti

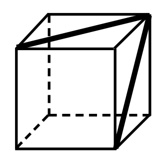
1. Per quale dei seguenti valori dati a x l'espressione $\frac{x^2}{x^3}$ assume valore minimo?

A) 2 B) -1 C) 1 D) -2 E) -3

2. Quanti numeri fra 2 e 100 sono uguali al cubo di un intero?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Quanto misura in gradi l'angolo tra le due diagonali delle facce del cubo rappresentato nella figura?



A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

4. Se $888 \times 111 = 2 \times (2 \times n)^2$ ed n è un numero positivo, allora n vale

A) 8 B) 11 C) 22 D) 111 E) 444

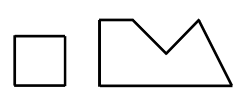
5. Si vogliono porre in ordine crescente cinque carte numerate da 1 a 5, attualmente allineate nell'ordine 45132. La sola mossa consentita consiste nello scambiare di posto fra loro due carte. Qual è il minimo numero di mosse sufficienti a riordinare le carte?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

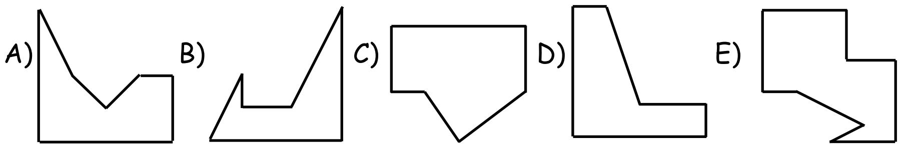
6. Quanti numeri primi più piccoli di 2005 sono tali che la somma delle loro cifre sia 3?

A) 4 B) 10 C) 5 D) 2 E) 1

7. Un quadrato di carta è stato tagliato in tre pezzi, due dei quali sono mostrati nella figura a lato. Quale, tra i seguenti, può essere il terzo?

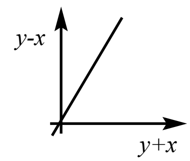


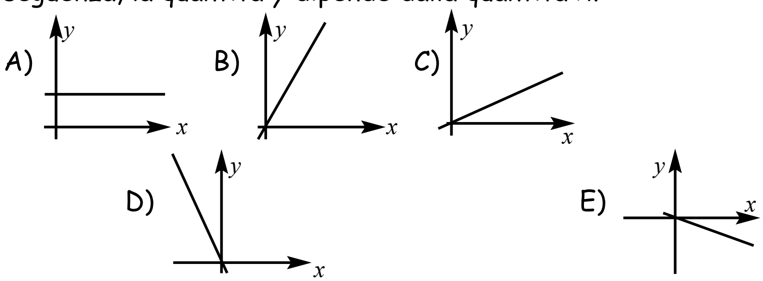
Student



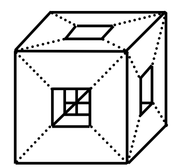
8. La somma di quattro interi positivi consecutivi non può essere uguale a
A) 2002 B) 22 C) 202 D) 222 E) 220

9. La figura a destra mostra in che modo la quantità $y - x$ dipende dalla quantità $y + x$. Quale tra i seguenti grafici può indicare in quale modo, di conseguenza, la quantità y dipende dalla quantità x?





10. Un cubo di materiale omogeneo il cui spigolo misura 3 cm pesa 810 grammi. Se operiamo tre fori come mostrato in figura, ciascuno dei quali sia un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1 cm x 1 cm x 3 cm, il peso del solido residuo sarà



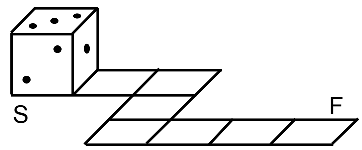
A) 540 g B) 570 g C) 600 g D) 630 g E) 660 g

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti

11. Quale dei seguenti numeri può essere espresso come prodotto di quattro interi a due a due differenti e maggiori di 1?
A) 625 B) 124 C) 108 D) 2187 E) 2025

12. Anna vuole dipingere un cubo, usando vernice bianca e vernice nera, in modo che ogni faccia risulti interamente dipinta o di bianco o di nero e che non tutte le facce risultino dello stesso colore. In quanti modi diversi può colorare il cubo? (Due colorazioni sono uguali se una è ottenibile dall'altra per rotazioni del cubo.)
A) 8 B) 16 C) 32 D) 52 E) 64

13. La somma dei punti sulle facce opposte di un dado è sempre 7. Un dado rotola lungo il percorso mostrato in figura. Nella posizione iniziale (S), sulla faccia superiore del dado si legge 3. Che cosa si legge sulla faccia superiore quando il dado è nella posizione finale (F)?

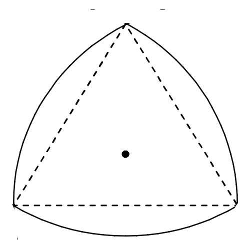


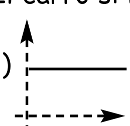
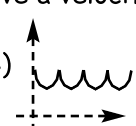
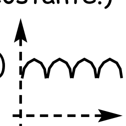
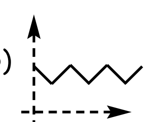
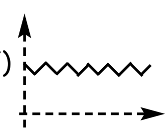
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Una scatola contiene 60 biglietti bianchi, rossi o verdi. Se tutti i biglietti rossi fossero sostituiti con biglietti verdi, allora i biglietti verdi sarebbero il doppio dei bianchi; se tutti i biglietti bianchi fossero sostituiti con biglietti verdi, allora i biglietti verdi sarebbero il triplo dei rossi. Quanti biglietti verdi contiene la scatola?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

15. Le ruote di uno strano carro hanno la forma "triangolare" illustrata in figura, dove il triangolo a contorno tratteggiato è equilatero e, per ogni lato, l'arco che ne congiunge gli estremi è un arco della circonferenza (di raggio uguale al lato) centrata nel vertice opposto. Sia $h = h(t)$ la funzione che assegna, all'istante t l'altezza da terra del punto più alto della ruota. Quale fra i seguenti è il diagramma della funzione h in un intervallo di tempo che consenta alla ruota di fare esattamente un giro completo su se stessa? (Il carro si muove a velocità costante.)



A)  B)  C)  D)  E) 

16. Sia M l'insieme di tutti i numeri reali x che verificano la disuguaglianza $2^{4^x} < 4^{2^x}$. Allora M è uguale a

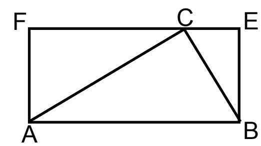
A) $(-\infty, 1)$ B) $(0,1)$ C) $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ D) $(0,+\infty)$ E) $(-\infty,+\infty)$

17. Il prodotto di 6 numeri interi a due a due diversi fra loro e compresi tra 1 e 10 inclusi non può essere uguale a

A) 720 B) 2002 C) 60480 D) 2520 E) 4032

18. Due bottiglie uguali sono piene di un miscuglio di acqua e vino. Il rapporto tra il volume dell'acqua e quello del vino è 2:1 per una bottiglia e 4:1 per l'altra. Se versiamo il contenuto di entrambe le bottiglie in una sola bottiglia di capacità doppia, il rapporto tra i volumi di acqua e vino in questa bottiglia sarà

A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 11:3 E) 8:1



19. La figura mostra un rettangolo ABEF e un triangolo ABC. Sapendo che l'angolo ACF è uguale all'angolo CBE e che FC=6 e CE=2, si ha che l'area del triangolo ABC è

A) 12 B) 16 C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) nessuna delle precedenti

20. In una griglia quadrata 2x2 sono inseriti 4 diversi numeri interi positivi dispari minori di 20. Quale delle seguenti affermazioni può non essere falsa?

A) La somma dei quattro numeri è 12.
B) La somma dei quattro numeri è 66.
C) La somma dei quattro numeri è 19.
D) Entrambi i prodotti dei numeri in diagonale valgono 21.
E) Entrambe le somme dei numeri in diagonale valgono 20.

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti

21. Enrico viaggia da una località A a una località B alla velocità costante *v*. Egli nota che, se viaggiasse a una velocità di 5 km/h superiore, arriverebbe a destinazione 5 ore prima del previsto, mentre se viaggiasse a una velocità di 10 km/h superiore, arriverebbe a destinazione 8 ore prima del previsto. Qual è la velocità *v* in km/h?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) nessuna delle precedenti.

22. Un tetraedro (non regolare) ha un vertice tale che le tre facce che vi confluiscono hanno aree 3, 4 e 6 e gli angoli di queste facce, relativi a quel vertice, misurano tutti 90°. Qual è il volume di quel tetraedro?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

23. Se la somma delle cifre di un intero positivo *m* è 30, allora la somma delle cifre di *m* +3 non può essere

A) 6 B) 15 C) 21 D) 24 E) 33

24. Due palline di mercurio con superficie di 2 mm^2 ciascuna si uniscono a formare un'unica pallina. Qual è la superficie della nuova pallina?

A) 2 mm^2 B) $2^{3/2}$ mm^2 C) $2^{5/3}$ mm^2
D) 4 mm^2 E) $2^{5/2}$ mm^2

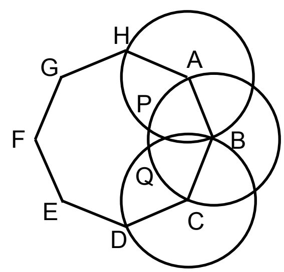
25. Posto $n = \text{Log}_{10}(\sqrt{2005}+\sqrt{1995})$, quale dei seguenti è il valore di $\text{Log}_{10}(\sqrt{2005}-\sqrt{1995})$?

A) n -1 B) 1-n C) 1/n D) n +1 E) nessuno dei precedenti

26. L'intero positivo m ha esattamente due divisori propri e l'intero positivo n ha esattamente cinque divisori propri. Quanti divisori propri ha l'intero mn ?

A) 5 B) 17 C) 7 D) 10
E) È impossibile determinarne il numero senza ulteriori informazioni.

27. Considera l'ottagono regolare ABCDEFGH avente lato di lunghezza 1, mostrato in figura. P è il punto di intersezione delle circonferenze di centri A e B e raggio 1, mentre Q lo è delle circonferenze di centri B e C e raggio 1. Qual è, in radianti, la misura dell'angolo APQ?

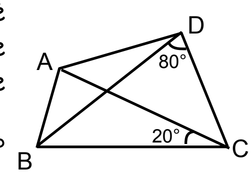


A) $19\pi/24$ B) $8\pi/11$ C) $5\pi/8$
D) $3\pi/4$ E) $7\pi/9$

28. Scegliamo un numero, raddoppiamolo e poi sottraiamo 1. Ripetendo questo procedimento per altre 98 volte (utilizzando ogni volta il numero ottenuto dal passo precedente), otteniamo 2^{100} +1. Qual è il numero scelto all'inizio?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) nessuno dei precedenti

29. Nel quadrilatero ABCD la diagonale BD è bisettrice dell'angolo ABC e AC=BC. Sapendo che gli angoli BDC e ACB misurano rispettivamente 80° e 20°, quanto misura l'angolo BAD?



A) 90° B) 100° C) 110° D) 120° E) 135°

30. Qual è la centesima cifra nella rappresentazione decimale del numero $\sqrt{0,999...9}$, dove la parte decimale del radicando è costituita da 100 cifre tutte uguali a 9?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) 9

Student

SOLUZIONE DEI QUESITI PER LA CATEGORIA STUDENT 2005

1. (**B**) L'espressione equivale a $\frac{1}{x}$: occorre dunque scegliere per x i valori negativi più piccoli possibile in valore assoluto.

2. (**C**) Si ha $2 < 2^3 < 3^3 < 4^3 < 100 < 5^3$.

3. (**C**) Gli estremi che le due diagonali tracciate non hanno in comune sono estremi della diagonale di una terza faccia che forma, con le altre due, un triangolo equilatero.

4. (**D**) Si ha $888 = 2 \times 2^2 \times 111$.

5. (**C**) Poiché ogni carta deve cambiare posto, sono necessari almeno tre scambi. Sono anche sufficienti: 2 si scambia con 5, 1 con 4 e quindi 3 con 4.

6. (**E**) L'unico numero primo la somma delle cui cifre sia 3 è 3, in quanto questa condizione implica la divisibilità per 3.

7. (**A**) Si può facilmente arrivare alla soluzione per via empirica.

8. (**E**) Se n, $n + 1$, $n + 2$ e $n + 3$ sono i quattro numeri, la loro somma è $4n + 6 = 4(n + 1) + 2$, dunque non è divisibile per 4; viceversa, ogni numero maggiore o uguale a 10, pari e non divisibile per 4, è somma di 4 interi positivi consecutivi. L'unico dei numeri proposti divisibile per 4 è 220, e gli altri sono tutti pari e maggiori di 10.

9. (**D**) La figura suggerisce che si ha $y - x = k(y + x)$, cioè $y = \frac{x(1+k)}{1-k}$, per qualche $k > 1$. Dunque si ha $y = ax$ per qualche $a < -1$ e l'unica risposta soddisfacente questo requisito è D).

10. (**C**) Il materiale asportato corrisponde a quello ospitato da $6 + 1 = 7$ cubetti di lato 1 cm e pesa dunque $7 \times 810/27 = 210$ grammi.

11. (**E**) Fattorizzando in numeri primi si ha $625 = 5^4$, $124 = 2^4 \times 31$, $108 = 2^3 \times 3^3$, $2.187 = 3^6$, $2025 = 3^4 \times 5^2$. Allora si può scrivere $2025 = 3 \times 9 \times 15 \times 5$, mentre per ciascuno degli altri numeri, comunque si raccolgano i fattori primi, non si riescono ad ottenere quattro fattori distinti maggiori di 1.

12. (**A**) Una sola faccia bianca o una sola faccia nera: 2 modi. Due facce bianche o due facce nere, opposte o adiacenti: 4 modi. Tre facce bianche, con un vertice in comune oppure no: 2 modi. In totale: 8 modi.

13. (**E**) Poiché i passi da fare non sono molti, conviene scrivere direttamente la sequenza dei punteggi riportati passo dopo passo sulla faccia superiore del dado: 3, 6, 4, 5, 3, 1, 4, 6.

14. (**D**) Sia B, R e V il numero rispettivamente dei biglietti bianchi, rossi e verdi. Il sistema $B + R + V = 60$, $R + V = 2B$ e $B + V = 3R$ fornisce $3B = 4R = 60$, da cui $B = 20$, $R = 15$ e $V = 25$.

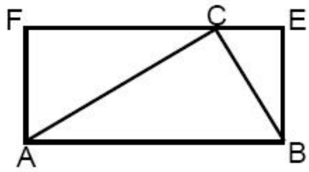
15. (**A**) Ogni raggio di una circonferenza è ad essa perpendicolare; inoltre, per costruzione, comunque scelga un punto su un arco, che non sia un estremo, il punto della ruota più lontano da esso è il centro della circonferenza cui l'arco appartiene. È chiaro infine che cosa accade in ognuno degli istanti in cui il punto di contatto con il terreno è un estremo di archi: il punto più alto della ruota è il punto dell'arco "opposto" che si proietta ortogonalmente in esso sul terreno. In ogni caso l'altezza da terra $h(t)$ è il raggio degli archi, dunque è costante.

16. (**A**) Si ha $2^{4^x} = 2^{2^{2x}}$ e $4^{2^x} = 2^{2^{x+1}}$. Poiché la base 2 è maggiore di 1, si ha $2^{2^{2x}} < 2^{2^{x+1}}$ se solo se $2^{2x} < 2^{x+1}$ se e solo se $2x < x + 1$ se e solo se $x < 1$.

17. (**B**) Fra sei diversi interi compresi fra 1 e 10 deve esserci necessariamente o un multiplo di 3 o un multiplo di 4 (infatti, complessivamente, questi multipli sono cinque). 2002 non è divisibile né per 3 né per 4 (si verifica facilmente che ognuna delle altre proposte è un prodotto del tipo di quelli indicati).

18. (**C**) Chiamiamo "parte" una quantità di liquido di volume fissato una volta per tutte. Possiamo schematizzare la situazione nel modo seguente. In ogni bottiglia vi sono 15 parti di liquido: nella prima vi sono 10 parti di acqua e 5 di vino, nella seconda 12 di acqua e 3 di vino. In totale, su 30 parti, 22 sono di acqua e 8 di vino.

19. (**D**) Nelle nostre ipotesi i triangoli rettangoli *AFC* e *CEB* sono simili. Denotando con $l(XY)$ la lunghezza di un segmento *XY*, si ha allora $l(AF) : l(CE) = L(FC) : l(EB) = l(AF)$ da cui $l(AF) = 2v3$. L'area cercata è allora 2v3 × (6 + 2) – (2v3 × 6) / 2 – (2v3 × 2) / 2 = 8v3.



Oppure: poiché i due angoli *ACF* e *CBE* sono uguali, il triangolo ABC è rettangolo in C. Per il secondo teorema di Euclide, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa equivale al rettangolo di lati congruenti a FC e CE. Quindi l'altezza misura v(2×6)= 2v3 e l'area misura 8v3.

20. (**E**) È molto facile trovare quattro numeri che soddisfino E), ad es. 1, 3, 17, 19: dunque E) può non essere falsa. Invece le restanti affermazioni sono false:
A) e B) perché la somma dei quattro numeri (positivi dispari e diversi!) deve essere almeno 1 + 3 +5 + 7 = 16 e al più 13 + 15 +17 + 19 = 64;
C) perché la somma di un numero pari di interi dispari è pari;
D) perché 21, essendo prodotto di due numeri primi, può essere espresso come prodotto di numeri interi, ciascuno minore di 21, in un solo modo (mentre le due diagonali devono essere diverse per ipotesi).

21. (**B**) Per comodità, dovendo esprimerci anche in termini di tempo, indichiamo con *s* la distanza (in Km) fra *A* e *B* (anche se di tale distanza alla fine non rimarrà traccia). Le informazioni che abbiamo consentono di costruire le due equazioni, che devono essere simultaneamente soddisfatte,

$$s / v - 5 = s / (v + 5) \qquad\qquad s / v - 8 = s / (v + 10).$$

Risolvendo il sistema si perviene facilmente al risultato.

22. (**A**) Indichiamo con *x*, *y*, *z* le lunghezze dei tre spigoli, a due a due perpendicolari fra loro, che concorrono nel vertice in questione. I dati del problema indicano che, assegnando tali lunghezze ai tre spigoli in modo opportuno, devono valere simultaneamente le tre uguaglianze

$$xy = 6 \qquad yz = 12 \qquad xz = 8.$$

Dunque $(xyz)^2 = (24)^2$, per cui il volume della piramide (a base triangolare) è 24/6.

23. (**C**) Per brevità, chiamiamo S la somma delle cifre di $m + 3$. Se l'ultima cifra di m è diversa da 7, 8 e 9, chiaramente S vale 33. Se invece l'ultima cifra di m è 7, 8 o 9, allora S viene sicuramente diminuita di almeno $7 - 1 = 8 - 2 = 9 - 3$ e, nel caso di "riporti", anche di $6+9k$ con k intero opportuno. Effettivamente può essere $S = 15$ (se, per esempio, $m = 6699$) o $S = 6$ (se, per esempio, $m = 3999$).

24. (**C**) Il volume di una sfera è proporzionale al cubo del raggio, la superficie al quadrato del raggio (si ricordi che vale 4 volte l'area di un cerchio massimo). Allora, se il volume raddoppia, significa che il raggio viene moltiplicato per il fattore $2^{1/3}$ e quindi la superficie per il fattore $4^{1/3} = 2^{2/3}$.

25. (**B**) Poniamo per comodità a =v2005 e b =v1995. Si ha

$$\mathrm{Log}_{10}(a-b) = \mathrm{Log}_{10}\frac{a^2-b^2}{a+b} = \mathrm{Log}_{10}\frac{10}{a+b} = 1 - \mathrm{Log}_{10}(a+b).$$

26. (**E**) È chiaro che è ben diversa la situazione in cui m e n hanno divisori in comune da quella in cui non ne hanno. Facciamo due esempi. Se $m = 2^3$ e $n = 2^6$, allora i divisori propri di $mn = 2^9$ sono 8. Se invece $m = 2^3$ e $n = 3^6$, allora i divisori propri di mn sono $4 \times 7 - 2 = 26$.

27. (**A**) La somma degli angoli interni del pentagono $ABCQP$ è 3π. Di essi, gli angoli PAB e BCQ misurano $\frac{\pi}{3}$ poiché i corrispondenti triangoli sono equilateri, l'angolo ABC misura $\frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ in quanto angolo interno di un ottagono regolare e i restanti due angoli sono uguali per motivi di simmetria: dunque l'angolo APQ misura $\frac{1}{2}\left(3\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{19\pi}{24}$.

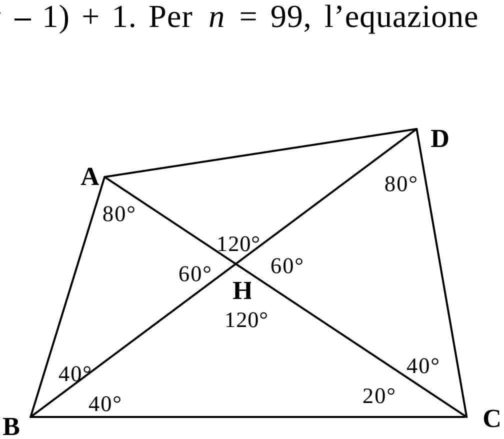
28. (**E**) Se x è il numero scelto, al primo passo otteniamo $2x - 1$, al secondo $2(2x-1) - 1 =$ $= 2^2x - 2^2 + 1 = 2^2(x-1) + 1$; proseguendo in questo modo, un passo alla volta, non è difficile convincersi che all'n-simo passo si ha $2^n(x-1) + 1$. Per $n = 99$, l'equazione $2^{99}(x-1) + 1 = 2^{100} + 1$ fornisce $x = 3$.

29. (**D**) Denotiamo con $l(XY)$ la lunghezza di un segmento XY. Con i dati a disposizione è facile assegnare le misure ad alcuni degli angoli rimanenti come indica la figura. Allora, per la similitudine dei triangoli AHB e CHD, si ottiene

$$l(HD) : l(AH) = l(HC) : l(BH)$$

da cui

$$l(BH) : L(AH) = L(HC) : l(HD).$$



Ne segue che, avendo l'angolo in H di ugual misura, anche i triangoli BHC e ADH sono simili, per cui l'angolo HAD misura quanto l'angolo HBC, cioè 40°.

30. (**E**) Il numero 0, 999…9 è (positivo e) minore di 1, dunque è minore della sua radice quadrata. Poiché le sue cifre decimali fino alla 100-ma sono tutte uguali a 9, ogni numero maggiore di esso deve avere le cifre decimali almeno fino alla 100-ma tutte uguali a 9.